Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ARITHMÉTIQUE DES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, Albert
Kapitel: 2. Eléments conjugués.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36338

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'ensemble $\mathbf{R}(\theta)$, formé de ce groupe et de l'élément nul, est un **corps**, au sens général de ce terme (ce qui justifie le nom de *corps quadratique*). L'ensemble des éléments rationnels r, de $\mathbf{R}(\theta)$, en est un **sous-corps**, **isomorphe** —ou, par abréviation, égal— *au corps* $\mathbf{R}$, des nombres rationnels (inversement $\mathbf{R}(\theta)$ est **sur corps** de $\mathbf{R}$).

La construction de l'addition, de la soustraction et de la multiplication et les qualités de ces opérations resteraient valables, même sans l'hypothèse d'irréductibilité de $F(x)$; les inverses n'existeraient alors que pour certains des éléments $r+s\theta$ (ceux pour lesquels $-r:s$ n'annule pas $F(x)$). L'ensemble construit serait seulement un **anneau**, commutatif avec une unité, —ou au sens restreint— .

On peut aussi considérer que $\mathbf{R}(\theta)$ est un *sous-corps* du *corps* des nombres: *réels* si D est positif; *complexes* si D est négatif. Cette conception fournit encore une justification des règles de calcul, y compris la division. Elle sera utilisée ci-dessous pour établir la détermination des cycles d'idéaux semi-réduits, dans un corps réel (**46** et **47**).

2. Eléments conjugués.

DÉFINITION. — Dans le corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, *deux éléments sont appelés* **conjugués**, ou chacun d'eux est le conjugué de l'autre, *lorsqu'ils sont égaux*, respectivement, *à des formes de* 1, θ *et de* 1, θ', *avec les mêmes multiplicateurs* (nombres rationnels). Ils sont désignés par la même lettre, avec et sans accent (comme θ et θ', qui sont des éléments conjugués particuliers):

$$\rho = r+s\theta = (r+Ss)-s\theta' \quad \Leftrightarrow \quad \rho' = r+s\theta' = (r-Ss)-s\theta.$$

Un élément du corps est *égal à son conjugué*, si et seulement si c'est un *élément rationnel* (coefficient de θ nul). Pour le vérifier, il suffit de former la différence de deux conjugués:

$$0 = \rho-\rho' = s\times(\theta-\theta') = -Ss+2s\theta = Ss-2s\theta' \quad \Leftrightarrow \quad s = 0.$$

Les éléments θ et θ' sont conjugués et inégaux.

Deux éléments de $\mathbf{R}(\theta)$, *obtenus en remplacant* x *par* θ *et* θ',

dans un même polynôme $f(x)$, à coefficients rationnels, *sont conjugués*:

$$f(\theta) = r+s\theta = \rho \quad \Leftrightarrow \quad f(\theta') = r+s\theta' = \rho'.$$

Car les éléments θ et θ', annulant chacun le polynôme fondamental (dans $\mathbf{R}(\theta)$), les valeurs qu'ils donnent à $f(x)$, sont respectivement égales à celles qu'ils donnent au binôme du premier degré:

$$r+sx = f(x)-F(x)\times q(x),$$

reste de la division de $f(x)$ par $F(x)$.

En particulier les éléments conjugués d'une somme, d'un produit (ou, plus généralement, d'une expression entière, à coefficients rationnels), d'éléments de $\mathbf{R}(\theta)$, sont égaux à la somme, au produit (ou à l'expression entière) des éléments respectivement conjugués.

Propriété, caractéristique de la conjugaison. — *Pour que deux éléments*, d'un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, *soient conjugués, il faut et il suffit que leur somme et leur produit soient des éléments rationnels* —ou égaux à leurs conjugués— .

Il est équivalent de dire que les deux éléments sont simultanément *zéros d'un même polynôme, du second degré*, normé, à coefficients rationnels.

La condition est *nécessaire*: $\rho+\rho'$ et $\rho\times\rho'$ sont respectivement égaux à leurs conjugués, en raison de la commutativité de la somme et du produit; ils sont donc rationnels. D'ailleurs:

$$(r+s\theta)+(r+s\theta') = 2r+Ss; \quad (r+s\theta)\times(r+s\theta') = r^2-Srs+Ns^2.$$

Les deux éléments conjugués sont zéros du trinôme normé:

$$\mathbf{r}(x) = (x-\rho)\times(x-\rho') = x^2-(2r+Ss)x+(r^2-Ss+Ns^2).$$

La condition est *suffisante*: en raison des propriétés de la division des polynômes, un trinôme normé du second degré $\mathbf{r}(x)$, à coefficients rationnels, considéré dans le corps $\mathbf{R}(\theta)$, ne peut avoir plus de deux zéros. Or les valeurs:

$$\mathbf{r}(r+s\theta) = \mathbf{r}(\rho) \qquad \mathbf{r}(r+s\theta') = \mathbf{r}(\rho'),$$

sont conjuguées, quel que soit le trinôme $\mathbf{r}(x)$, à coefficients rationnels.

Elles ne peuvent être nulles que simultanément; *si* $\mathbf{r}(x)$ *a un zéro, il en a un deuxième qui est le conjugué du premier.*

Si deux éléments ρ, ρ' ont pour somme et pour produit des éléments rationnels: $S(\rho) = S(\rho')$ et $N(\rho) = N(\rho')$, ils sont les deux zéros du trinôme normé

$$\mathbf{r}(x) = x^2 - S(\rho)x + N(\rho) = (x-\rho)\times(x-\rho');$$

donc sont conjugués.

Définitions. — Dans un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, pour un couple d'éléments conjugués, ρ et ρ', —ou pour chacun d'eux— , on appelle:

Trace: la somme $\rho+\rho'$, désignée par $S(\rho)$, ou $S(\rho')$;

Norme: le produit $\rho\times\rho'$, désigné par $N(\rho)$, ou $N(\rho')$;

Polynôme fondamental: le trinôme normé, qui a pour zéros ρ et ρ':

$$\mathbf{r}(x) = (x-\rho)\times(x-\rho') = x^2 - S(\rho)\times x + N(\rho);$$

Discriminant: le carré de leur différence, qui est encore un élément rationnel:

$$(\rho-\rho')^2 = [S(\rho)]^2 - 4N(\rho) = s^2\times D; \qquad \text{désigné par } D(\rho).$$

Pour deux éléments conjugués, exprimés avec le générateur θ, ou θ':

$$\rho = r+s\theta = r'+s'\theta'; \qquad \rho' = r+s\theta' = r'+s'\theta;$$

la trace et la norme sont égales indifféremment à:

$$S(\rho) = S(\rho') = 2r+Ss = 2r' + Ss';$$
$$N(\rho) = N(\rho') = r^2+Srs+Ns^2 = r'^2+Sr's'+Ns'^2.$$

On peut encore exprimer la norme en utilisant la décomposition de $4F(x)$:

$$4N(\rho) = 4N(\rho') = (2r+Ss)^2 - Ds^2 = (2r'+Ss')^2 - Ds'^2.$$

Pour le couple d'éléments θ et θ', ces expressions deviennent:

$$S(\theta) = S(\theta') = S; \quad N(\theta) = N(\theta') = N; \quad D(\theta) = D(\theta') = D.$$

Pour un élément rationnel r, ce sont:

$$S(r) = 2r; \quad N(r) = r^2; \quad D(r) = 0.$$

De ces définitions il résulte que: l'*inverse* ρ^{-1}, d'un élément ρ, non nul, *est égal au produit de son conjugué par l'inverse de sa norme*:

$$\rho^{-1} = \rho' \times [N(\rho)]^{-1}, \qquad \rho'^{-1} = \rho \times [N(\rho)]^{-1}$$

La *transformation* —ou l'*autotransformation*— qui, dans un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, fait correspondre —ou substitue— à tout élément ρ son conjugué ρ', est *biunivoque* et *involutive* (le conjugué du conjugué est égal à l'élément lui-même). Elle conserve les éléments rationnels —ou laisse invariant le sous-corps $\mathbf{R}$— elle conserve les opérations (addition et multiplication, ainsi que leurs inverses soustraction et division): le conjugué (du résultat) d'une expression rationnelle à coefficients rationnels, d'éléments du corps est égal à (le résultat) de l'expression rationnelle, avec les mêmes coefficients, des conjugués respectifs des éléments de l'expression primitive.

Dans le langage de l'algèbre moderne, la conjugaison est un **automorphisme** du corps $\mathbf{R}(\theta)$, considéré comme une *extension* du corps $\mathbf{R}$, ou comme une *adjonction* à ce corps $\mathbf{R}$, d'un zéro de $F(x)$.

3. Domaine des entiers (algébriques) d'un corps quadratique.

Par anticipation de la définition générale des bases d'un idéal (**9**), on appellera **bases canoniques conjuguées**, d'un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta')$, les deux couples conjugués d'éléments, éventuellement disposés en colonnes:

$$1\ \theta, \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} 1 \\ \theta \end{matrix} \right\|; \qquad 1\ \theta', \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} 1 \\ \theta' \end{matrix} \right\|;$$

qui ont permis d'engendrer les couples d'éléments conjugués du corps par des formes, qui peuvent être écrites en produits matriciels:

$$\rho = r + s\theta = \|rs\| \times \left\| \begin{matrix} 1 \\ \theta \end{matrix} \right\|; \qquad \rho' = r + s\theta' = \|rs\| \times \left\| \begin{matrix} 1 \\ \theta' \end{matrix} \right\|$$

Les nombres rationnels r,s, multiplicateurs —ou variables—, de la forme qui définit un élément ρ, seront appelés les **coor-**