10. Bases algébriques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

10. Bases algébriques.

Pour engendrer un idéal avec certains de ses éléments, on peut conjuguer, à l'addition et à la soustraction, la multiplication par des entiers du corps; ceci conduit à la définition suivante (comparer à celle d'une base arithmétique; **9**).

DÉFINITION. — *On appelle* **base algébrique**, d'un idéal fractionnaire **I**, *un système* de *h éléments* ρ_i, de **I**, tel que *tout élément* ρ, *de* **I**, *soit égal à une forme* (linéaire) *de ces termes* ρ_i, pour des valeurs des variables —ou des *multiplicateurs*— égaux à des *entiers du corps*

$$\rho = \Sigma \xi_i \times \rho_i; \qquad i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad \xi_i \text{ entiers du corps.}$$

Une *base arithmétique* d'un idéal **I** est, à fortiori algébrique: tout élément de **I** est égal à une forme, pour des multiplicateurs entiers rationnels, donc, entiers du corps.

D'autre part, la multiplication des ρ_i par des entiers du corps ne donne que des éléments de **I**.

Il n'y a pas de condition imposée aux éléments d'une base algébrique; c'est ce que précise la propriété suivante.

THÉORÈME de la génération d'un idéal par une base algébrique. — Dans un corps $\mathbf{R}(\theta)$, *étant donné* (arbitrairement) *un système*, d'un nombre fini h (peut être réduit à 1) *d'éléments* ρ_i, du corps, *l'ensemble des sommes*, de leurs produits par des entiers du corps;

$$\rho = \Sigma \xi_i \times \rho_i; \qquad i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad \xi_i \text{ entiers du corps;}$$

est un idéal fractionnaire, dont le système des ρ_i est une *base algébrique.*

Cet idéal est désigné par la notation:

$\mathbf{I} = (\ldots, \rho_i, \ldots)$; (les ρ_i éventuellement écrits nommément); (dont on précisera, le cas échéant, qu'elle est une base arithmétique). Elle a déjà été employée pour un idéal défini par sa base canonique (qm, $q \times (\theta - c)$) (ci-dessus **7. 1** et **8. 1**).

L'ensemble des éléments ρ, ainsi construit, vérifie bien les conditions du théorème caractéristique (**8. 2**): il contient les différences (et sommes mutuelles), obtenues par les différences des multiplicateurs ξ_i, de même indice; et les produits par tout entier α, du corps, obtenus en multipliant les ξ_i par α. En outre les facteurs rationnels des éléments ρ sont limités inférieurement, au moins par le p.g.c.d. w des facteurs rationnels des termes ρ_i. Car les produits $w^{-1} \times \rho_i$, ayant des facteurs rationnels entiers, sont des entiers du corps. Alors, pour tout élément ρ:

$$\rho = w \times (\Sigma \xi_i \times (w^{-1} \times \rho_i)) = w \times \text{entier du corps};$$

son facteur rationnel est un multiple de w, donc lui est au moins égal.

A une base algébrique, *on peut*, évidemment, *adjoindre d'autres éléments de l'idéal engendré*, c'est-à-dire toute valeur d'une forme des termes de la base, pour des variables, égales à des entiers du corps.

Inversement, dans une base algébrique, définissant un idéal, *on peut* supprimer un terme, s'il est égal à une forme linéaire des autres, pour des valeurs des variables, égales à des entiers du corps.

10. 2. *Cas particuliers et opérations.*

L'*élément unité* 1 est, à lui seul, une base algébrique de l'idéal trivial $\mathbf{E}(\theta)$, qui est, par suite désigné par (1) et dont on a déjà dit qu'il était appelé *l'idéal unité* (**8. 3**), nom qui sera ci-dessous (**12**) l'objet d'une justification complémentaire. On peut adjoindre à 1 des entiers quelconques du corps et inversement *une base formée d'entiers du corps et comprenant* 1 *engendre l'idéal* (1).

Un élément unique ρ est une base algébrique de l'idéal formé par les produits de ρ par tous les entiers du corps, donc du produit par ρ de l'idéal unité (**8. 4**):

$$(\rho) = \rho \times (1), \quad \text{ou} \quad \rho \times \mathbf{E}(\theta);$$

un tel idéal est appelé **principal**, de base ρ (ci-dessous **11**).

La *multiplication* par un élément (**8. 4**) —et la *conjugaison* (**8. 5**)— d'un idéal sont réalisées par des opérations simples

sur une base algébrique (produits par ρ —et conjugués— de ses termes):

$$\rho \times (\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\rho \times \rho_i,\ldots);$$
$$(\ldots,\rho_i,\ldots)' = (\ldots,\rho_i',\ldots).$$

La vérification est immédiate; éventuellement les bases restent arithmétiques, ce qui a déjà été constaté directement (**9. 2** et **9. 3**).

10. 3. *Propriétés d'inclusion.*

De la génération des idéaux par des bases algébriques, on déduit immédiatement des propriétés d'inclusion dont on indique ci-dessous qu'elles sont aussi des propriétés de *divisibilité* (**18 bis**).

Pour qu'*un idéal* **F** *contienne un idéal* **I**, défini par une *base algébrique*, il faut et il suffit que *chacun des termes* ρ_i *de cette base appartienne à* **F**, ou que chaque idéal principal (ρ_i) soit inclus dans **F**:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) \subset \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_i \in \mathbf{F} \quad [\text{ou } (\rho_i) \subset \mathbf{F}], \qquad \text{tout } i.$$

En particulier, pour qu'un idéal **I**, défini par une base algébrique soit *entier* (**8. 3**) —ou soit contenu dans l'idéal (1)— il faut et il suffit que les termes de sa base soient des entiers du corps.

La propriété d'inclusion s'étend immédiatement à plusieurs idéaux: *pour qu'un idéal* **F** *contienne des idéaux* (un ou plusieurs) définis par des bases algébriques, il faut et il suffit qu'*il contienne tous les termes des bases.*

Ceci peut être exprimé par la définition —ou construction— et la propriété suivantes.

Pour un système (d'un nombre fini) d'idéaux, définis par des bases algébriques:

$$\mathbf{I} = (\ldots,\rho_i,\ldots), \quad \mathbf{J} = (\ldots,\rho_j,\ldots), \quad \ldots$$

on appelle plus petit idéal contenant —et on appellera ci-dessous *plus grand commun diviseur*— l'idéal **D**, dont une base algébrique est constituée par la *réunion des bases*, des idéaux considérés:

$$\mathbf{D} = (\ldots,\rho_i,\ldots;\ldots,\rho_j,\ldots;\ldots), \quad \text{en abrégé } (\mathbf{I},\mathbf{J},\ldots).$$

Pour qu'un idéal **F** contienne des idéaux **I**,**J**,..., il faut et il suffit qu'il contienne leur plus petit idéal contenant:

$$\{\mathbf{I} \subset \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} \subset \mathbf{F}, \quad \text{et} \quad \ldots\} \Leftrightarrow (\mathbf{I},\mathbf{J},\ldots) \subset \mathbf{F}.$$

La propriété résulte immédiatement de l'énoncé précédent. Elle montre que la construction de l'idéal **D** est indépendante des bases choisies pour définir les idéaux considérés: un idéal $\mathbf{D}_1$ construit avec d'autres bases doit être contenu dans **D**, mais aussi le contenir; ils sont donc égaux.

La construction de **D** est donc une opération déterminée sur les idéaux **I**,**J**, ...; c'est une égalité dans le cas d'un seul idéal; elle est manifestement associative et commutative.

La notation adoptée pour un idéal défini par une base algébrique de termes ρ_i, peut être considérée comme l'indication de la construction du plus petit idéal contenant les idéaux principaux (ρ_i):

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,(\rho_i),\ldots).$$

Par analogie avec le vocabulaire de l'arithmétique élémentaire, on dit que *des idéaux principaux* (α_i), —ou leurs bases α_i— *sont* premiers entre eux, dans leur ensemble, lorsque leur plus petit idéal contenant est l'idéal unité —ou lorsque le système des bases α_i constitue une base algébrique de l'idéal unité— :

$$(\ldots,\alpha_i,\ldots) = (1).$$

On vérifie aisément qu'il en est ainsi si et seulement si les α_i sont des entiers du corps et s'il existe des entiers ξ_i, du corps tels que $\Sigma\xi_i \times \alpha_i = 1$.

Des nombres entiers, premiers entre eux, au sens de l'arithmétique ordinaire, considérés comme des entiers rationnels, d'un corps quadratique, sont aussi premiers, au sens précédent.

10. 4. *Construction d'une base arithmétique.*

En modifiant une base algébrique par remplacement, ou par adjonction de termes on peut la rendre arithmétique.

Pour un idéal **I**, défini par une base algébrique de h éléments ρ_i, *on obtient une base arithmétique*, de $2h$ éléments, *en multipliant par chaque terme* ρ_i *les deux termes* γ_1 γ_2, *d'une base arithmétique des entiers du corps* —ou de l'idéal unité— (**4**):

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\gamma_1 \times \rho_i, \gamma_2 \times \rho_i, \ldots).$$

On peut choisir notamment, comme il a été fait pour le théorème caractéristique (**9. 5**), une base 1τ, des entiers. La modification de la base se borne alors à l'adjonction des h termes $\tau \times \rho_i$:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\rho_i,\ldots;\ldots,\tau\times\rho_i, \ldots)$$

Le système de $2h$ termes est encore une base algébrique de **I**: d'une part tous ses termes, produits par des entiers du corps des termes de **I** appartiennent à **I**. D'autre part l'idéal engendré par cette nouvelle base contient tous les éléments des idéaux:

$$\rho_i \times (\gamma_1, \gamma_2) = (\rho_i),$$

et notamment tous les termes ρ_i; donc l'idéal **I**.

Reste à vérifier que cette base vérifie la condition caractéristique d'une base arithmétique. Les produits $\gamma_j \times \tau$ pouvant être construits avec la base arithmétique $\gamma_1\, \gamma_2$, on en conclut, pour chaque terme de la nouvelle base:

$$\begin{aligned}(\gamma_j \times \rho_i) \times \tau = \rho_i \times (\gamma_j \times \tau) &= \rho_i \times (x_j \times \gamma_1 + y_j \times \gamma_2) \\ &= x_j \times (\rho_i \times \gamma_1) + y_j \times (\rho_i \times \gamma_2)\end{aligned}$$

les x_j, y_j sont des nombres entiers, dépendant de j égal à 1 ou 2 et de i (de 1 à h). Les produits par τ, des termes de la nouvelle base, peuvent donc être effectivement construits par additions et soustractions, au moyen de ces termes eux-mêmes.

11. Idéaux principaux.

Définition (Rappel; **10. 2**). — *Un idéal* fractionnaire *est appelé* **principal**, lorsqu'il peut être engendré par *une base d'un seul élément* ρ; c'est-à-dire lorsqu'il est égal au produit par l'élément ρ de l'idéal unité (1).

L'élément ρ *est une* **base** (sous entendu algébrique) de *l'idéal* qui est lui-même désigné, comme il a été dit par:

$$(\rho) \quad \text{abréviation de} \quad \rho \times (1), \quad \text{ou} \quad \rho \times \mathbf{E}(\theta).$$

L'*idéal nul* est un idéal principal de base 0. Pour un idéal principal, non nul, *toutes les bases sont égales aux produits de l'une*