Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 13. Propriétés des normes.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36339

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

une base arithmétique, les produits des générateurs $\rho_i \times \sigma_j$, *forment une base arithmétique*, du produit $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) \text{ arithmétique} \quad \Rightarrow \quad (\ldots,\rho_i \times \sigma_j,\ldots) \text{ arithmétique.}$$

Il suffit d'utiliser le théorème caractéristique (**9. 5**) des bases arithmétiques. En prenant une base 1 τ, de (1), l'hypothèse est exprimée par l'existence de nombres entiers z_{ir}, tels que:

$$\rho_i \times \tau = \Sigma z_{ir} \times \rho_r; \qquad \text{tout } i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad r \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

Cette même condition est alors remplie par les produits, car:

$$(\rho_i \times \sigma_j) \times \tau = (\rho_i \times \tau) \times \sigma_j = \Sigma z_{ir} \times (\rho_r \times \sigma_j); \qquad r \text{ de } 1 \text{ à } h; \quad \text{tous } i,j.$$

On a déjà utilisé, en fait, un cas particulier de cette construction, en formant une base arithmétique d'un idéal défini par une base algébrique (**10. 4**) (notamment d'un idéal principal, **11. 2**); il est égal à son produit par l'idéal (1), qui peut être défini par une base arithmétique de deux termes $\gamma_1\, \gamma_2$, de sorte que:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\gamma_1, \gamma_2) \times (\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\gamma_1 \times \rho_i, \gamma_2 \times \rho_i,\ldots).$$

C'est la base, qui a été justifiée par un raisonnement direct.

Un autre cas particulier d'une telle multiplication est donnée par la forme canonique d'un idéal (**8. 1**), ce qu'expriment les égalités:

$$q \times (m, \theta - c) = (q) \times (m, \theta - c) = (q \times m, q \times (\theta - c)).$$

L'idéal est égal au produit de l'idéal principal (q), de base q, par l'idéal canonique, de base arithmétique m, $\theta - c$, d'où la base arithmétique $q \times m$, $q \times (\theta - c)$.

13. Propriétés des normes.

On va étudier, plus spécialement, la multiplication d'idéaux, mis sous leur forme canonique, et en déduire des propriétés des normes, qui justifient leur définition, donnée ci-dessus, à priori (**8. 1**).

THÉORÈME des normes. — *Le produit de deux idéaux conjugués est égal à l'idéal principal rationnel, dont une base est leur norme commune* (nombre rationnel positif, défini **8. 1**):

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (\text{norme de } \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad (N(\mathbf{I})).$$

La norme d'un produit d'idéaux est égal au *produit de leurs normes*

$$\text{norme } (\mathbf{I}\times\mathbf{J}) = \text{norme de } \mathbf{I} \times \text{norme de } \mathbf{J}.$$

On peut établir d'abord la première propriété, pour un idéal canonique:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta-c), \qquad \mathbf{M}' = (m,\ \theta'-c);$$

une base (arithmétique) du produit $\mathbf{M}\times\mathbf{M}'$ est formée du produit des générateurs:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = (m^2,\ \ m\times(\theta-c),\ \ m\times(\theta'-c),\ \ (\theta-c)\times(\theta'-c)).$$

Le dernier terme est égal à l'entier rationnel $F(c) = \pm m\times n$, de sorte que m peut être mis en facteur commun:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = m\times\mathbf{E}_1 = (m)\times\mathbf{E}_1; \qquad \mathbf{E}_1 = (m,\ \theta-c,\ \theta'-c,\ n).$$

L'idéal $\mathbf{E}_1$ contient les éléments suivants qui sont des entiers rationnels:

$$m, \quad n, \quad \theta-c+\theta'-c = S-2c \equiv c'-c, \quad (\text{mod. } m),$$

où c' est zéro conjugué de c, de la congruence fondamentale, mod. m. On vérifie qu'ils sont premiers entre eux, en constatant qu'un nombre premier p ne peut les diviser simultanément. Il suffit de se borner à un diviseur p, de m, il divise les entiers $F(c)$, et $F(c')$ qui sont divisibles par m. Alors, *ou bien* p ne divise pas le discriminant du corps, les zéros c et c' de la congruence fondamentale sont distincts et p ne divise pas $c'-c$. *Ou bien*, il y a une racine double c et c' étant congrus, mod. p; mais alors p^2 ne divise pas $|F(c)| = m\times n$ et p ne divise pas n (propriétés de la congruence fondamentale **4** et **5**).

L'idéal $\mathbf{E}_1$ engendré par des entiers algébriques est entier, comme il contient trois entiers rationnels premiers entre eux, il contient leur p.g.c.d., qui est 1; il contient donc tous les entiers du corps et il est égal à $\mathbf{E}(\theta)$, ou à (1). Donc:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = (m)\times(1) = (m).$$

Le cas général en résulte immédiatement, par application de la *commutativité* et de l'*associativité* de la multiplication:

$$\mathbf{I} = (q)\times(m,\ \theta—c), \qquad \mathbf{I}' = (q)\times(m,\ \theta'—c);$$
$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (q)\times(q)\times(m,\ \theta—c)\times(m,\ \theta'—c) = (q^2)\times(m) = (q^2m).$$

La seconde propriété se déduit immédiatement de la première:

$$\text{Norme de } \mathbf{I}\times\mathbf{J} = (\mathbf{I}\times\mathbf{J})\times(\mathbf{I}'\times\mathbf{J}') = (\mathbf{I}\times\mathbf{I}')\times(\mathbf{J}\times\mathbf{J}')$$
$$= [N(\mathbf{I})]\times[N(\mathbf{J})].$$

Le *carré d'un idéal double* **G** —égal à son conjugué, (**7**)— *est égal à l'idéal principal rationnel*, dont une base est la norme de **G**:

$$\mathbf{G} = q\times(g,\ \theta—c) = q\times(g,\ \theta'—c) = \mathbf{G}' \Rightarrow \mathbf{G}^2 = \mathbf{G}\times\mathbf{G}' = (q^2\times g).$$

Les cas particuliers indiqués pour la multiplication entraînent des cas particuliers et des conséquences du théorème des normes.

La *norme d'un idéal principal* (ρ) *est égale à la valeur absolue* $|N(\rho)|$, de la norme de ρ [égale pour les diverses bases possibles, (**11. 1**)], [ceci a déjà été établi par un raisonnement direct pour un idéal canonique, (**11. 3**)]

$$(\rho)\times(\rho') = (\text{norme de } \rho) \quad\Rightarrow\quad \text{norme de } (\rho) = |\text{norme de } \rho|.$$

En particulier la norme d'un *idéal principal rationnel* (q) est égale à q^2.

Un idéal entier **F** *contient sa norme*, puisque son idéal conjugué **F'** étant aussi entier, chacun d'eux contient $\mathbf{F}\times\mathbf{F}'$.

Il n'y a qu'*un idéal entier*, *de norme* 1, qui est l'*idéal unité*. Car un tel idéal étant contenu dans (1) et contenant (1), lui est égal.

14. Division des idéaux fractionnaires.

DÉFINITION. — *Deux idéaux*, non nuls, *sont* **inverses** —ou chacun d'eux est l'inverse de l'autre— *lorsque leur produit est égal à l'idéal unité* (1).

Les normes d'idéaux inverses sont des nombres inverses, puisque leur produit est égal à la norme de l'idéal (1). Cette remarque, jointe à l'expression du produit de deux idéaux conjugués (**13**), conduit à la construction d'idéaux inverses.