Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 14. Division des idéaux fractionnaires.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36339

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le cas général en résulte immédiatement, par application de la *commutativité* et de l'*associativité* de la multiplication:

$$\mathbf{I} = (q)\times(m,\ \theta—c), \qquad \mathbf{I}' = (q)\times(m,\ \theta'—c);$$
$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (q)\times(q)\times(m,\ \theta—c)\times(m,\ \theta'—c) = (q^2)\times(m) = (q^2m).$$

La seconde propriété se déduit immédiatement de la première:

$$\text{Norme de } \mathbf{I}\times\mathbf{J} = (\mathbf{I}\times\mathbf{J})\times(\mathbf{I}'\times\mathbf{J}') = (\mathbf{I}\times\mathbf{I}')\times(\mathbf{J}\times\mathbf{J}')$$
$$= [N(\mathbf{I})]\times[N(\mathbf{J})].$$

Le *carré d'un idéal double* **G** —égal à son conjugué, (**7**)— *est égal à l'idéal principal rationnel*, dont une base est la norme de **G**:

$$\mathbf{G} = q\times(g,\ \theta—c) = q\times(g,\ \theta'—c) = \mathbf{G}' \Rightarrow \mathbf{G}^2 = \mathbf{G}\times\mathbf{G}' = (q^2\times g).$$

Les cas particuliers indiqués pour la multiplication entraînent des cas particuliers et des conséquences du théorème des normes.

La *norme d'un idéal principal* (ρ) *est égale à la valeur absolue* $|N(\rho)|$, de la norme de ρ [égale pour les diverses bases possibles, (**11. 1**)], [ceci a déjà été établi par un raisonnement direct pour un idéal canonique, (**11. 3**)]

$$(\rho)\times(\rho') = (\text{norme de } \rho) \quad\Rightarrow\quad \text{norme de } (\rho) = |\text{norme de } \rho|.$$

En particulier la norme d'un *idéal principal rationnel* (q) est égale à q^2.

Un idéal entier **F** *contient sa norme*, puisque son idéal conjugué **F'** étant aussi entier, chacun d'eux contient $\mathbf{F}\times\mathbf{F}'$.

Il n'y a qu'*un idéal entier*, *de norme* 1, qui est l'*idéal unité*. Car un tel idéal étant contenu dans (1) et contenant (1), lui est égal.

14. Division des idéaux fractionnaires.

DÉFINITION. — *Deux idéaux*, non nuls, *sont* **inverses** —ou chacun d'eux est l'inverse de l'autre— *lorsque leur produit est égal à l'idéal unité* (1).

Les normes d'idéaux inverses sont des nombres inverses, puisque leur produit est égal à la norme de l'idéal (1). Cette remarque, jointe à l'expression du produit de deux idéaux conjugués (**13**), conduit à la construction d'idéaux inverses.

THÉORÈME des idéaux inverses. — Deux idéaux dont les normes sont des nombres inverses et dont les facteurs canoniques sont des idéaux conjugués:

$$\mathbf{I}_1 = q_1 \times (m,\ \theta - c), \quad \mathbf{I}_2 = q_2 \times (m,\ \theta' - c); \quad (q_1^2 m) \times (q_2^2 m) = 1$$

sont des *idéaux inverses.*

La vérification est immédiate. D'après cette propriété, tout idéal **I**, non nul, a (au moins) un *inverse*, qui, suivant une notation usuelle est désigné par une *puissance* d'*exposant* —1:

$$\mathbf{I} = q \times (m,\ \theta - c) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}^{-1} = (q \times m)^{-1} \times (m,\ \theta' - c).$$

Un raisonnement, dont le caractère général a déjà été rappelé (**1. 2**), permet de déduire de cette existence la possibilité et la détermination de la *division* (opération inverse de la multiplication) des idéaux, ce qui comprend notamment la *détermination* —ou l'unicité— de l'*idéal unité* et de l'*inverse d'un idéal.*

THÉORÈME de la division des idéaux. — Etant donnés: un idéal **D**, appelé *dividende* et un idéal **I**, non nul, appelé *diviseur*; *il existe un et un seul idéal* **J**, appelé *quotient* de **D** par **I**, dont le produit par le diviseur **I** est égal au dividende **D**.

Le quotient d'un idéal, non nul, *par lui-même*, est égal à l'*idéal unité* (1), qui est, par suite le seul idéal neutre (**12. 2**) pour la multiplication.

Le quotient de l'idéal (1), par un idéal **I**, non nul, est l'*idéal* $\mathbf{I}^{-1}$ (construit par le théorème précédent), qui est, par suite, le seul idéal inverse de **I**.

Le *quotient*, d'un idéal **D** par un idéal **I**, non nul, est égal au produit de **D** par $\mathbf{I}^{-1}$ —inverse de **I**— :

$$\mathbf{I} \times \mathbf{I}^{-1} = (1) \quad \begin{cases} \mathbf{I} \times \mathbf{J} = \mathbf{I} & \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} = (1); \\ \mathbf{I} \times \mathbf{J} = (1) & \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{I}^{-1}; \\ \mathbf{I} \times \mathbf{J} = \mathbf{D} & \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{D} \times \mathbf{I}^{-1}. \end{cases}$$

La dernière équivalence est obtenue en multipliant les deux membres de l'égalité de gauche par $\mathbf{I}^{-1}$, ou les deux membres de l'égalité de droite par **I**. La première et la seconde équivalence sont de conséquences de la dernière.

La construction de l'*inverse* (déterminé) d'*un idéal* **I**, non nul, est équivalente à la *multiplication de son conjugué* **I**′ *par l'inverse de leur norme commune.*

Cette règle est applicable à un idéal défini par une base (algébrique ou arithmétique), son inverse est défini par la base obtenu en multipliant les conjugués des éléments de la base de **I** par l'inverse de la norme de **I**. Pour un idéal principal, ceci donne une expression évidente par elle-même:

$$(\rho)^{-1} = (\rho' : N(\rho)) = \rho' \times (\rho^{-1} \times \rho'^{-1}) = (\rho^{-1}).$$

L'existence et les propriétés de la multiplication et de la division des idéaux, non nuls, peuvent être (partiellement) exprimées en disant que:

Les idéaux (fractionnaires) *non nuls*, d'un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, constituent un **groupe multiplicatif abélien** —ou commutatif— . Il sera, en général, désigné par $\mathcal{G}(\theta)$, ou simplement $\mathcal{G}$.

Ce groupe contient notamment les *puissances d'exposants entiers* (quelconques) de chacun de ses éléments, définies (suivant les notations usuelles) par les formules:

$$h \text{ entier positif:} \quad \mathbf{I}^h = \mathbf{I} \times \ldots \times \mathbf{I} \quad (h \text{ facteurs égaux});$$
$$\mathbf{I}^{-h} = (\mathbf{I}^{-1})^h = (\mathbf{I}^h)^{-1}; \quad \mathbf{I}^0 = (1).$$

Ces puissances vérifient manifestement les règles usuelles de calcul:

$$\mathbf{I}^h \times \mathbf{I}^k = \mathbf{I}^{h+k}; \quad (\mathbf{I}^h)^k = \mathbf{I}^{h \times k}; \quad h,k \text{ entiers quelconques.}$$

Le groupe contient, par suite, les *monômes*, ou produits de puissances, $\mathbf{I}_1^{h1} \times \mathbf{I}_2^{h2} \times ..$, dont les règles de calcul sont également usuelles

14 bis. Sous groupe des idéaux principaux rationnels.

Dans le groupe $\mathcal{G}(\theta)$, la famille des idéaux principaux rationnels (q) (**11**) constitue un sous-groupe, qui sera noté $\mathcal{Q}$, **isomorphe** au groupe multiplicatif des nombres rationnels positifs q.