# 4, 4. Covariance .

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

On montre aisément que $\mathbf{SC}\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\}$ n'est autre que $\mathbf{SC}EM$ du modèle additif. Chacune de ces deux sommes de carrés est en effet due à un sous-espace de $\mathbf{V}^*$ ayant deux dimensions et orthogonal tant à $\hat{\mu}$, $\hat{\Delta}\lambda$, $\hat{\Delta}_1\gamma$, $\hat{\Delta}_2\gamma$ qu'aux différences « internes » $x_{2i} - x_{2i-1}$, et un tel espace est unique.

$\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ (et leurs combinaisons linéaires, notamment $\hat{\theta}_3$) portent le nom de « contrastes de non-additivité » (le terme « contrastes d'interaction » n'est guère heureux). On remarquera que, si les $M_i$ déterminent entièrement les paramètres « orthogonalement estimables » $\mu$, $\Delta\lambda$, $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\theta_1$, $\theta_2$, ceux-ci à leur tour déterminent entièrement les $M_i$. C'est en le posant au moyen des paramètres $\mu$, ..., $\theta_2$ que le problème de la classification $(2 \times 3)$ (avec un nombre quelconque d'observations par cellule) se traite le plus aisément. Toutefois, ces paramètres ne restent orthogonalement estimables que si toutes les cellules renferment un même nombre d'observations.

**Remarque.** — Ces considérations s'étendent immédiatement aux autres problèmes de classification.

## 4, 4. *Covariance* [15]).

4, 41. Supposons que l'on dispose d'une observation de chacune de $n$ variables aléatoires indépendantes, normales, de même variance $\sigma^2$, réparties en $s$ groupes, le $i^{ème}$ groupe étant formé de $n_i$ éléments, avec

$$\begin{cases} \mathbf{E}\,\mathbf{x}_{i,j} = T_i + \beta\, v_{i,j} \\ i = 1, \ldots, s\ ; \quad j = 1, \ldots, n_i\ ; \quad n_1 + \ldots + n_s = n\ ; \end{cases}$$

les $v_{i,j}$ étant des nombres certains [16]). On a ici

$$\mathfrak{b}_H = \| T_1, \ldots, T_s, \beta \|^T ,$$

et, en supposant que dans chaque groupe il y a au moins deux valeurs $v_{i,j}$ distinctes,

$$p = r = s + 1 .$$

On se convainc aisément que la matrice $\mathfrak{G}_H$ n'est pas diagonale. Toutefois, il est aisé d'orthogonaliser le problème; il suffit de poser

$$\begin{aligned} v_{i,-} &= (1/n_i) \sum_j v_{i,j} \\ u_{i,j} &= v_{i,j} - v_{i,} \quad , \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} \mathbf{E}\, x_{i,j} = A_i + \beta\, u_{i,j} \\ i = 1, \ldots, s \; ; \quad j = 1, \ldots, n_i \; ; \quad \sum_j u_{i,j} = 0 \\ A_i \equiv T_i - \beta\, v_{i,-} \; . \end{cases}$$

En fait, cela revient à référer $\mathbf{B}$ à une base $\mathfrak{K}$ telle que

$$\mathfrak{b}_K = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -v_{1,-} \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & -v_{s,-} \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \mathfrak{b}_H$$

On a alors

$$\mathfrak{A}_K = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & u_{1,1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & & u_{1,n_1} \\ & 1 & & & u_{2,1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ & 1 & \ldots & & u_{2,n_2} \\ & & \ldots & & \vdots \\ & & & 1 & u_{s,1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & u_{s,n_s} \end{matrix} \right\|$$

(les termes non écrits étant nuls).

4, 42. Il est alors utile de poser

$$\begin{aligned} S_{i;t,q} &= \sum_j (u_{i,j})^t \, (x_{i,j})^q \, , \\ S_{;t,q} &= \sum_i S_{i;t,q} \, , \\ S'_{i;t,q} &= \sum_j (v_{i,j})^t \, (x_{i,j})^q \, , \\ S'_{;t,q} &= \sum_i S'_{i;t,q} \, , \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_K^T \mathfrak{x} &= \| S_{1;0,1}, \ldots, S_{s;0,1}, S_{;1,1} \| \, , \\ \mathfrak{G}_K &= \operatorname{diag} (n_1, \ldots, n_s, S_{;2,0}) \, , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}}_i = \mathbf{S}_{i;0,1}/n_i \\ \hat{\beta} = \mathbf{S}_{;1,1}/S_{;2,0} \,, \end{cases}$$

$\mathbf{SC}T = \mathbf{S}_{;0,2}$ (avec $n$ degrés de liberté),

$\mathbf{SC}\{\hat{\mathbf{A}}_i\} = \mathbf{red}\,[A_i] = (\mathbf{S}_{i;0,1})^2/n_i$ (avec 1 degré de liberté),

$\mathbf{SC}\{\hat{\beta}\} = \mathbf{red}\,[\beta] = (\mathbf{S}_{;1,1})^2/S_{;2,0}$ (avec 1 degré de liberté),

$\mathbf{SC}N = \sum_i SC\{\hat{\mathbf{A}}_i\} + SC\{\hat{\beta}\}$ (avec $s+1$ degrés de liberté),

$\mathbf{SC}E = \mathbf{SC}T - \mathbf{SC}N$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i\,\mathbf{S}_{i;0,2} - (\mathbf{S}_{i;0,1})^2}{n_i} - \frac{\sum_i \left[n_i\,\mathbf{S}'_{i;1,1} - S'_{i;1,0}\,\mathbf{S}_{i;0,1}\right]}{\sum_i \left[n_i\,S'_{i;2,0} - (S'_{i;1,0})^2\right]}$$

(avec $n - s - 1$ degrés de liberté).

$\sigma^2$ est estimé par $\mathbf{SCE}/(n - s - 1)$.

4, 43. En fait, l'intérêt se porte généralement sur l'estimation des différences $T_i - T_k$, les paramètres $A_i$ n'ayant pas d'intérêt propre. On a, en posant $\varphi_{i,-} - \varphi_{k,-} = d_{i,k}$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_i - \mathbf{T}_k)^\wedge &= \left[(\hat{\mathbf{A}}_i + \hat{\beta}\,\varphi_{i,-}) - (\hat{\mathbf{A}}_k + \hat{\beta}\,\varphi_{k,-})\right]^\wedge \\ &= \hat{\mathbf{A}}_i - \hat{\mathbf{A}}_k + \hat{\beta}\,d_{i,k} \\ &= \mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x} \equiv \| l_{1,1}, \ldots, l_{s,n_s} \|\,\mathfrak{x} \end{aligned}$$

moyennant

$$\begin{aligned} l_{t,q} &= d_{i,k}\,u_{t,q}/S_{;2,0} \qquad \text{si } t \neq i,\ t \neq k\,, \\ l_{i,q} &= d_{i,k}\,u_{i,q}/S_{;2,0} + 1/n_i\,, \\ l_{k,q} &= d_{i,k}\,u_{k,q}/S_{;2,0} - 1/n_k\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{l} = (d_{i,k})^2/S_{;2,0} + 1/n_i + 1/n_k\,.$$

Il résulte de là que l'expression

$$\Delta_{i,k} = \frac{\left[(\hat{\mathbf{T}}_i - \hat{\mathbf{T}}_k) - (T_i - T_k)\right]}{\sqrt{[\mathbf{SC}E/(n-s-1)}\,.\,\sqrt{[(d_{i,k})^2/S_{;2,0} + 1/n_i + 1/n_k]}}$$

est une aléatoire $\mathbf{t}_{n-s-1}$.

On voit que l'erreur-type de $\Delta_{i,k}$, produit de $\sigma$ par

$$\varepsilon_{i,k} = \left[\frac{(d_{i,k})^2}{S_{;2,0}} + \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k}\right]^{1/2},$$

varie, en général, avec la paire $(i, k)$, même si les $n_i$ sont égaux entre eux ($n_1 = \ldots = n_s = \nu$). Toutefois, dans ce dernier cas, on utilise d'ordinaire une expression approchée de $\varepsilon_{i,k}$, obtenue en considérant les $\varphi_{i,j}$ comme $n$ observations indépendantes d'une même aléatoire, de moyenne $\varphi$ et écart-type $\theta$ [17]). En désignant par $\mathbf{M}$ la valeur moyenne prise par rapport à la distribution de cette aléatoire (fictive), on a

$$\mathbf{M}\,(\varphi_{i,-} - \varphi_{k,-})^2 = \mathbf{M}\,[(\varphi_{i,-} - \varphi) - (\varphi_{k,-} - \varphi)]^2$$
$$= 2\,\mathbf{M}\,(\varphi_{i,-} - \varphi)^2 = 2\,\theta^2/\nu\ ;$$

$$\mathbf{M}\,S_{;2,0} = \mathbf{M}\sum_i \sum_j (\varphi_{i,j} - \varphi_{i,-})^2 = \sum_i (\nu - 1)\,\theta = k\,(\nu - 1)\,\theta^2\ ;$$

$$\left\{\frac{\mathbf{M}\,(\varphi_{i,-} - \varphi_{k,-})^2}{\mathbf{M}\,S_{;2,0}} + \frac{1}{n_i}\,\frac{1}{n_k}\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{\nu}\left[1 + \frac{1}{k\,(\nu - 1)}\right]\right\}^{1/2}\ ;$$

c'est cette dernière expression que l'on utilise comme valeur approchée de $\varepsilon_{i,k}$.

4, 44. Il est utile aussi de calculer la somme de carrés due au sous-espace $\mathsf{U}^\star$ engendré par les estimateurs des contrastes $T_i - T_k$, afin de pouvoir construire une épreuve globale de la nullité de ceux-ci. On pourrait évidemment construire une base orthogonale de $\mathsf{U}^\star$, mais les calculs nécessaires sont d'une grande complication. Il est beaucoup plus simple d'appliquer le théorème du § 2, 31, en procédant comme suit: on considère le modèle

$$\mathbf{E}\,\mathbf{x}_{i,j} = T + \beta\,\varphi_{i,j}$$

et on calcule la somme de carrés de l'erreur qui lui est associée, c'est-à-dire (voir § 4, 211)

$$(\mathbf{SC}E)_{T_i = T} = \mathbf{S}_{;0,2} - \frac{(\mathbf{S}_{;0,1})^2}{n} - \frac{(\mathbf{S}_{;1,1})^2}{S_{;2,0}}\ ;$$

or ce modèle s'obtient à partir du modèle initial en supposant

que, pour tout vecteur $\mathfrak{l}^\star$ de $\mathsf{U}^\star$, on a $\mathfrak{E}\,\mathfrak{l}^\star = 0$; par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star &= (\mathbf{SC}E)_{T_i=T} - \mathbf{SC}E \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{S}_{i;0,1})^2}{n_i} - \frac{(\mathbf{S}_{;0,1})^2}{n} \,. \qquad (19)\end{aligned}$$

Si on pose

$$\mathbf{x}_{i,-} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_j \mathbf{x}_{i,j}\,, \quad \mathbf{x}_{-,-} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_i \sum\nolimits_j \mathbf{x}_{i,j} = \sum\nolimits_i \left(\frac{n_i}{n}\right) \mathbf{x}_{i,-}\,,$$

la formule (19) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(\sum_j \mathbf{x}_{i,j}\right)^2}{n_i} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum\nolimits_j \mathbf{x}_{i,j}\right)^2 \\ &= n \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} (\mathbf{x}_{i,-})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n}\mathbf{x}_{i,-}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s} n_i\,(\mathbf{x}_{i,-} - \mathbf{x}_{-,-})^2 \,. \qquad (20)\end{aligned}$$

L'expression (20), moins aisée à mettre en nombres que l'expression (19), est plus parlante qu'elle.

L'hypothèse $T_1 = T_2 = \ldots = T_s$ s'éprouve en comparant

$$\frac{\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star/(s-1)}{\mathbf{SC}E/(n-s-1)}$$

à la distribution de $\mathbf{F}$ à $(s-1)$ et $(n-s-1)$ degrés de liberté. La table d'analyse de variance se présente ainsi:

$$\begin{array}{lll}
SCT = S_{;0,2} & & n \text{ d.l.} \\
SCN \begin{cases} \text{red}\,[T] = (S_{;0,1})^2/n \\ \text{red}\,[\beta] = (S_{;1,1})^2/S_{;2,0} \\ \text{red}\,[T_1 - T_2, \ldots, T_1 - T_s \mid T, \beta] = \mathrm{SC}\,\mathsf{U}^\star \end{cases} & (s+1) & \begin{cases} 1 \text{ d.l.} \\ 1 \text{ d.l.} \\ (s-1) \text{ d.l.} \end{cases} \\
SCE = SCT - SCN & (n-s-1) \text{ d.l.} &
\end{array}$$

Si plusieurs paires $(i, j)$ correspondent à une même valeur de $v_{i,j}$, on peut introduire, en outre, la décomposition habituelle de $SCE$ en $SC$int et $SCEM$.