28. Exemples de calculs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

28. Exemples de calculs.

Le tableau V donne les valeurs pour x de 0 à $H = 100$, du trinôme $F(x)$ déjà utilisé (tableaux I et III), de discriminant $D = -39$. Le *rang* r (**25**) est égal à 2.

Les *deux premières valeurs* de $F(x)$, ont pour diviseurs premiers **2**, **3**, **5**, qui sont des diviseurs de $F(x)$, pour les valeurs respectives:

$$0+2\lambda,\ 1+2\lambda;\qquad 0+5\lambda,\ 4+5\lambda;\qquad 1+3\lambda.$$

Il n'y a qu'une progression pour 3, qui est diviseur de D.

On a inscrit devant chaque valeur de la table, le monôme des puissances des facteurs 2, 3, 5, qui en est diviseur, de façon à calculer les quotients q_x. Les périodicités, ou les progressions sont mises en évidence par l'alignement (vertical) de ces facteurs.

Le *premier quotient*, rencontré ensuite, qui soit différent de 1 est $F(3):2 = \mathbf{11}$. Il est premier, on l'a inscrit devant les valeurs dont il est diviseur et qui sont données par les progressions de raison 11 et de premiers termes 3 et 7. Deux seulement $F(51)$ et $F(69)$ sont divisibles par une puissance supérieure de 11; les autres appartenant à des progressions de raison 11^2 sont extérieures à la table.

Le premier quotient obtenu ensuite, qui soit différent de 1 est $F(6):2^2 = \mathbf{13}$. C'est un nombre premier, diviseur de D; il n'est obtenu que pour les valeurs d'une seule progression $6+13\lambda$, et seulement à la première puissance.

Les quotients suivants, jusqu'à $F(13)$ exclus, qui devient supérieur à $(2\times6+1)^2 = 169$, sont égaux à 1, ou sont premiers:

$F(7): (2\times3\times11) = 1$; $\quad F(8): 2 = \mathbf{41}$; $\quad F(9): (2^2\times5^2) = 1$;
$F(10): (2^3\times3\times5) = 1$; $\quad F(11): 2 = \mathbf{71}$; $\quad F(12):2 = \mathbf{83}$.

On inscrit ces nombres premiers devant les valeurs de la table, dont ils sont diviseurs, et qui sont données par:

41 pour $x = 8, 49, 90;\ 32, 73;$ **71** pour $x = 11, 82;\ 59;$
83 pour $x = 12, 95;\ 70;$

ils n'y figurent qu'à la première puissance.

Le premier quotient différent de 1, qui est rencontré ensuite est $F(16): (2\times3) = \mathbf{47}$; il est premier et il en est de même de ceux des

quotients suivants, qui sont différents de 1, jusqu'à $F(33)$ exclus, qui est supérieur à $(2\times 16 + 1)^2 = 1\,089$. Certains sont encore diviseurs d'autres valeurs du tableau, ce sont:

47 pour $x = 16, 63;\ 30, 77;$ **79** pour $x = 17, 96;\ 61;$
43 pour $x = 20, 63;\ 22, 65;$ **59** pour $x = 21, 80;\ 37, 96;$
61 pour $x = 24, 85;\ 36, 97;$ **89** pour $x = 26;\ 62.$

Par contre, les diviseurs premiers **281**, **383**, **137**, ne se rencontrent plus dans le tableau, limité à $H = 100$.

Le premier quotient rencontré ensuite, est $F(33) : 2^2 =$ **283**; il est premier et il en est de même de ceux des quotients suivants qui sont différents de 1 jusqu'à $F(67)$ exclus qui est supérieur à $(2\times 33 + 1)^2 = 4\,489$. Dans ces quotients, ceux qui figurent plus d'une fois dans le tableau, limité à $H = 100$, sont:

127 pour $x = 35;\ 91;$ **103** pour $x = 47;\ 55;$
149 pour $x = 54;\ 94;$ **139** pour $x = 64;\ 74.$

Le premier quotient rencontré ensuite est $F(67) : (2\times 3) =$ **761**; il est premier et il en est de même de tous les quotients suivants de la table, car $(2\times 67 + 1)^2 = 18\,225$ est supérieur à $F(100)$.

Dans la table, les nombres en caractères gras sont les facteurs p rencontrés pour leur racine minimum $\bar{c}_p$ (ou pour la première fois).

On rappelle qu'il a été indiqué ci-dessus que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à douze progressions arithmétiques de raison commune 39.

Le *deuxième exemple*, donné dans le tableau VI, est constitué par les valeurs pour x de O à $H = 100$, du trinôme, de discriminant D positif (définissant un corps réel):

$$F(x) = x^2 - 47; \qquad D = (-4)\times(-47) = 188.$$

Les valeurs sont négatives et de valeurs absolues décroissantes jusqu'à $F(6)$; elles sont ensuite positives et croissantes.

Le rang r est égal à 4, car:

$$5\times(2\times 3)^2 = 180 < 4\times 47 < 5\times(2\times 4)^2 = 320.$$

Les quatre premières valeurs de $F(x)$ ont pour diviseurs premiers: **2**, **47**, qui sont diviseurs de D, et **23**, **43**, **19**. On inscrit devant chaque valeur les monômes de ces facteurs qui en sont des diviseurs.

Tableau V.

$$F(x) = x^2+x+10 \qquad D = -39 = (-3)\times 13 \qquad r = 2.$$

c	$F(c)$	Diviseurs
0	10	**2. 5**
1	12	2^2. **3**
2	16	2^4
3	22	2. **11**
4	30	2. 3. 5
5	40	2^3. 5
6	52	2^2. **13**
7	66	2. 3 *11*
8	82	2. **41**
9	100	2^2. 5^2
10	120	2^3. 3. 5
11	142	2. **71**
12	166	2. **83**
13	192	2^6. 3
14	220	2^2. 5. 11
15	250	2. 5^3
16	282	2. 3 **47**
17	316	2^2. **79**
18	352	2^5. 11
19	390	2. 3. 5. 13
20	430	2. 5. **43**
21	472	2^3. **59**
22	516	2^2. 3. *43*
23	562	2. **281**
24	610	2. 5. **61**

c	$F(c)$	Diviseurs
25	660	2^2. 3. 5. 11
26	712	2^3. **89**
27	766	2. **383**
28	822	2. 3. **137**
29	880	2^4. 5. 11
30	940	2^2. 5. *47*
31	1 002	2. 3. **167**
32	1 066	2. 13. *41*
33	1 132	2^2. **283**
34	1 200	2^4. 3. 5^2.
35	1 270	2. 5. **127**
36	1 342	2. 11. *61*
37	1 416	2^3. 3. *59*
38	1 492	2^2. **373**
39	1 570	2. 5. **157**
40	1 650	2. 3. 5^2. 11
41	1 732	2^2. **433**
42	1 816	2^3. **227**
43	1 902	2. 3. **317**
44	1 990	2. 5. **199**
45	2 080	2^5. 5. 13
46	2 172	2^2. 3. **181**
47	2 266	2. 11. **103**
48	2 362	2. **1 181**
49	2 460	2^2. 3. 5. 41

c	$F(c)$	Diviseurs
50	2 560	2^9. 5.
51	2 662	2. 11^3
52	2 766	2. 3. **461**
53	2 872	2^3. **359**
54	2 980	2^2. 5. **149**
55	3 090	2. 3. 5. *103*
56	3 202	2. **1 601**
57	3 316	2^2. **829**
58	3 432	2^3. 3. 11. 13
59	3 550	2. 5^2. *71*
60	3 670	2. 5. **367**
61	3 792	2^4. 3. *79*
62	3 916	2^2. 11. *89*
63	4 042	2. 43. 47
64	4 170	2. 3. 5. **139**
65	4 300	2^2. 5^2. 43
66	4 432	2^4. **277**
67	4 566	2. 3. **761**
68	4 702	2. **2 351**
69	4 840	2^3. 5. 11^2
70	4 980	2^2. 3. 5. *83*
71	5 122	2. 13. **197**
72	5 266	2. **2 633**
73	5 412	2^2. 3. 11. 41
74	5 560	2^3. 5. *139*

c	$F(c)$	Diviseurs
75	5 710	2. 5. **571**
76	5 862	2. 3. **977**
77	6 016	2^7. 47
78	6 172	2^2. **1 543**
79	6 330	2. 3. 5. **211**
80	6 490	2. 5. 11. 59
81	6 652	2^2. **1 663**
82	6 816	2^5. 3. 71
83	6 982	2. **3 491**
84	7 150	2. 5^2. 11. 13
85	7 320	2^3. 3. 5. 61
86	7 492	2^2. **1 873**
87	7 666	2. **3 833**
88	7 842	2. 3. **1 307**
89	8 020	2^2. 5. **401**
90	8 200	2^3. 5^2. 41
91	8 382	2. 3. 11. *127*
92	8 566	2. **4 283**
93	8 752	2^4. **547**
94	8 940	2^2. 3. 5. *149*
95	9 130	2. 5. 11. 83
96	9 322	2. 59. 79
97	9 516	2^2. 3. 13. 61
98	9 712	2^4. **607**
99	9 910	2. 5. **991**
100	10 110	2. 3. 5. **337**

Les quotients suivants, pour les valeurs de x, définies par:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 4)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 10$$

sont uniquement des valeurs, ou des moitiés de valeurs du polynôme puisqu'à l'exception du diviseur 2, la première valeur devant laquelle on a inscrit un des diviseurs précédents est $F(16)$ divisible par 19. Ce sont:

$F(4) = -\mathbf{31}$; $F(5):2 = -\mathbf{11}$; $F(6) = -11$; $F(7):2 = +2$;
$F(8) = +\mathbf{17}$; $F(9):2 = +17$; $F(10) = +\mathbf{53}$.

On les inscrit devant les valeurs suivantes de la table qu'ils divisent, éventuellement avec l'exposant convenable.

Le quotient suivant $F(11):2 = +\mathbf{37}$ est premier; ceux qui suivent pour les valeurs de x:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 11)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 23,$$

sont égaux à 1, ou sont premiers. Ces derniers sont encore égaux aux valeurs, ou aux moitiés des valeurs du polynôme; les seuls quotients donnés par des diviseurs déjà inscrits, à l'exception de 2, sont:

$$F(16):(19\times 11) = +1; \qquad F(22):(23\times 19) = +1.$$

Les seuls nombres premiers ainsi obtenus qui figurent encore dans la table, limitée à $H = 100$, sont **37**, **97**, **61**, **89**.

Le premier quotient suivant qui est différent de 1 est $F(28):11 = \mathbf{67}$, ceux qui suivant pour les valeurs de x:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 28)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 56,$$

sont égaux à 1 ou premiers; ceux qui figurent plus d'une fois dans la table sont: **67**, **127**, **101**, **107**, **151**.

Au-delà de $x = 56$, tous les quotients sont premiers ou égaux à 1.

La disposition typographique est semblable à celle de l'exemple précédent, les nombres premiers obtenus pour la première fois (pour leur racine minimum) sont en caractères gras.

L'application de la loi de la réciprocité (**22**) montre que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à $\varphi(168):2 = 46$ progressions arithmétiques, de raison commune 168 et de premiers termes: 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 31, 35, 37, 39, 43, 49, 53, 61, 65, 67, 81, 87, 89, 91, 97, 99, 101, 107, 121, 123, 127, 135, 139, 145, 149, 151, 153, 157, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 177, 179, 187.

Tableau VI.

$F(x) = x^2 - 47 \qquad D = 188 = (-4) \times (-47) \qquad r = 4.$

c	F(c)	Diviseurs
0	— 47	**47**
1	— 46	**2. 23**
2	— 43	**43**
3	— 38	2. **19**
4	— 31	**31**
5	— 22	2. **11**
6	— 11	*11*
7	+ 2	2.
8	17	**17**
9	34	2. 17
10	53	**53**
11	74	2. **37**
12	97	**97**
13	122	2. **61**
14	149	**149**
15	178	2. **89**
16	209	*19.* 11
17	242	2. 11^2
18	277	**277**
19	314	2. **157**
20	353	**353**
21	394	2. **197**
22	437	*23.* 19
23	482	2. **241**
24	529	23^2

c	F(c)	Diviseurs
25	578	2. 17^2
26	629	17. *37*
27	682	2. *31.* 11
28	737	11. **67**
29	794	2. **397**
30	853	**853**
31	914	2. **457**
32	977	**977**
33	1 042	2. **521**
34	1 109	**1 109**
35	1 178	2. 19. 31
36	1 249	**1 249**
37	1 322	2. **661**
38	1 397	11. **127**
39	1 474	2. 11. *67*
40	1 553	1 **553**
41	1 634	2. *43.* 19
42	1 717	17. **101**
43	1 802	2. 17. *53*
44	1 889	**1 889**
45	1 978	2. 23. 43
46	2 069	**2 069**
47	2 162	2. 47. 23
48	2 257	37. *61*
49	2 354	2. 11. **107**

c	F(c)	Diviseurs
50	2 453	11. **223**
51	2 554	2. **1 277**
52	2 657	**2 657**
53	2 762	2. **1 381**
54	2 869	19. **151**
55	2 978	2. **1 489**
56	3 089	**3 089**
57	3 202	2. **1 601**
58	3 317	31. *107*
59	3 434	2. 17. *101*
60	3 553	19. 11. 17
61	3 674	2. 11. **167**
62	3 797	**3 797**
63	3 922	2. 53. 37
64	4 049	**4 049**
65	4 178	2. **2 089**
66	4 309	31. **139**
67	4 442	2. **2 221**
68	4 577	23. **199**
69	4 714	2. **2 357**
70	4 853	23. **211**
71	4 994	2. 11. **227**
72	5 137	11. **467**
73	5 282	2. 19. *139*
74	5 429	61. *89*

c	F(c)	Diviseurs
75	5 578	2. **2 789**
76	5 729	17. **337**
77	5 882	2. 17. **173**
78	6 037	**6 037**
79	6 194	2. 19. **163**
80	6 353	**6 353**
81	6 514	2. **3 257**
82	6 677	11. **607**
83	6 842	2. 11. **311**
84	7 009	43. *163*
85	7 178	2. 37. *97*
86	7 349	**7 349**
87	7 522	2. **3 761**
88	7 697	43. **179**
89	7 874	2. 31. *127*
90	8 053	**8 053**
91	8 234	2. 23. *179*
92	8 417	19. **443**
93	8 602	2. 23. 11. 17
94	8 789	47. 11. 17.
95	8 978	2. 67^2.
96	9 169	53. *173*
97	9 362	2. 31. *151*
98	9 557	19. **503**
99	9 754	2. **4 877**
100	9 953	37. **269**