40. Idéaux semi réduits.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

40. Idéaux semi réduits.

Pour « étendre » la définition des idéaux réduits, on peut d'abord déduire de la propriété caractéristique, établie ci-dessus (**38**), une remarque complémentaire.

Dans un corps réel, *un idéal réduit* $\mathbf{M} = (m, \theta - \bar{c})$ *a, au moins, deux racines distinctes, qui donnent à* $F(x)$ *des valeurs négatives.*

Pour l'idéal réduit **M**, de racine minimum $\bar{c}$, la somme:

$$F(\bar{c}+m)+F(\bar{c}-m) = 2[F(\bar{c})+m^2]$$

n'est pas positive, puisque $F(\bar{c})$ est négative et m^2 au plus égal à $|F(\bar{c})|$. Il en résulte que l'une au moins des valeurs $F(\bar{c}+m)$, et $F(\bar{c}-m)$, qui ne peuvent être nulles, est négative, en même temps que $F(\bar{c})$. Comme $\bar{c}+m$ et $\bar{c}-m$ sont différents de $\bar{c}$, la propriété est établie.

Ceci suggère la définition suivante: Définition. — Dans un corps quadratique réel, *un idéal canonique est* **semi réduit**, *lorsqu'il a*, au moins, *deux racines distinctes, qui donnent des valeurs négatives à* $F(x)$*:*

$$\mathbf{M} = (m, \ \theta - c_1) = (m, \ \theta - c_2); \qquad c_1 - c_2 \equiv 0, \quad (\text{mod. } m);$$
$$c_1 \neq c_2; \qquad F(c_1) < 0, \qquad F(c_2) < 0.$$

En particulier, un idéal réduit est, a fortiori, semi réduit. *L'idéal* **M'**, *conjugué, d'un idéal* **M** *semi réduit, est aussi semi réduit*, car les racines $S - c_1$ et $S - c_2$, de l'idéal **M'**, donnent à $F(x)$, les mêmes valeurs négatives, que les racines c_1 et c_2, de **M**.

Pour un idéal semi réduit, il y a ainsi plusieurs (2 ou plus) termes successifs de la progression arithmétique des racines qui donnent une valeur négative à $F(x)$; ils comprennent la racine minimum $\bar{c}$; ils sont en nombre fini [contenus entre les zéros irrationnels, négatif et positif, de $F(x)$]; et ils ont deux termes extrêmes. Ceci suggère la définition générale suivante.

Définition. — Dans un corps quadratique réel, *on appelle* **racine initiale** et **racine finale**, d'un idéal canonique **M**, *la plus*

petite (ou la première) *et la plus grande* (ou la dernière) *des racines*, s'il en existe, *qui donnent une valeur négative au polynôme fondamental* $F(x)$.

Elles sont caractérisées par l'équivalence de conditions:

$$F(c) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c_i \text{ initiale} \leqslant c \leqslant c_f \text{ finale}\};$$

ce qui est équivalent à la proposition contraposée ($F(c)$ ne pouvant être nul):

$$F(c) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c < c_i \text{ initiale, } ou\ c > c_f \text{ finale}\}$$

Les racines initiale et finale de l'idéal **M'**, conjugué d'un idéal **M**, sont respectivement les racines conjuguées:

$$c_i' = S - c_f, \qquad c_f' = S - c_i,$$

des racines finale et initiale de **M**.

Pour un idéal semi réduit, les racines initiale et finale existent et sont distinctes. En outre le nombre entier $(2c - S)$ est

positif, pour la racine finale: $2c_f - S > 0$;

négatif, pour la racine initiale: $2c_i - S < 0$;

(il n'est pas nul).

La différence $c_f - c_i$ est positive et multiple de m, en sorte que $c_f - m \geqslant c_i$ et $c_i + m \leqslant c_f$ donnent des valeurs négatives à $F(x)$. Il en est de même des racines conjuguées:

$$F(S - [c_f - m]) = F(c_f - m) < 0; \qquad F(S - [c_i + m]) = F(c_i + m) < 0.$$

Donc $S - c_f + m$ et $S - c_i - m$ sont, tous deux, inférieurs à $c_f + m$ et supérieurs à $c_i - m$ (qui donnent des valeurs positives à $F(x)$). Il en résulte:

$$S - c_f + m < c_f + m \quad \Leftrightarrow \quad 2c_f - S > 0;$$
$$S - c_i - m > c_i + m \quad \Leftrightarrow \quad 2c_i - S < 0.$$

41. Couple d'idéaux associés semi réduits.

Les idéaux semi réduits se présentent par couples d'idéaux associés relativement à une racine (**26**), aussi bien initiale que finale. Pour les idéaux d'un tel couple on peut en effet donner