41. Couple d'idéaux associés semi réduits.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

petite (ou la première) *et la plus grande* (ou la dernière) *des racines*, s'il en existe, *qui donnent une valeur négative au polynôme fondamental* $F(x)$.

Elles sont caractérisées par l'équivalence de conditions:

$$F(c) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c_i \text{ initiale} \leqslant c \leqslant c_f \text{ finale}\};$$

ce qui est équivalent à la proposition contraposée ($F(c)$ ne pouvant être nul):

$$F(c) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c < c_i \text{ initiale, } ou\ c > c_f \text{ finale}\}$$

Les racines initiale et finale de l'idéal **M'**, conjugué d'un idéal **M**, sont respectivement les racines conjuguées:

$$c_i' = S - c_f, \qquad c_f' = S - c_i,$$

des racines finale et initiale de **M**.

Pour un idéal semi réduit, les racines initiale et finale existent et sont distinctes. En outre le nombre entier $(2c - S)$ est

positif, pour la racine finale: $2c_f - S > 0$;

négatif, pour la racine initiale: $2c_i - S < 0$;

(il n'est pas nul).

La différence $c_f - c_i$ est positive et multiple de m, en sorte que $c_f - m \geqslant c_i$ et $c_i + m \leqslant c_f$ donnent des valeurs négatives à $F(x)$. Il en est de même des racines conjuguées:

$$F(S - [c_f - m]) = F(c_f - m) < 0; \qquad F(S - [c_i + m]) = F(c_i + m) < 0.$$

Donc $S - c_f + m$ et $S - c_i - m$ sont, tous deux, inférieurs à $c_f + m$ et supérieurs à $c_i - m$ (qui donnent des valeurs positives à $F(x)$). Il en résulte:

$$S - c_f + m < c_f + m \quad \Leftrightarrow \quad 2c_f - S > 0;$$
$$S - c_i - m > c_i + m \quad \Leftrightarrow \quad 2c_i - S < 0.$$

41. Couple d'idéaux associés semi réduits.

Les idéaux semi réduits se présentent par couples d'idéaux associés relativement à une racine (**26**), aussi bien initiale que finale. Pour les idéaux d'un tel couple on peut en effet donner

des conditions de semi réduction, qui sont: nécessaires séparément et suffisantes simultanément.

THÉORÈME caractéristique de semi réduction. — *Deux idéaux canoniques* **M** *et* **N**, *étant associés*, relativement à une racine c qui donne à $F(x)$ une valeur négative:

$$F(c) = -m \times n; \quad \mathbf{M} = (m, \ \theta - c), \quad \mathbf{N} = (n, \ \theta - c);$$
$$m, \ n \text{ entiers positifs};$$

pour que l'un d'eux soit semi réduit, et admette c comme racine soit initiale, soit finale, *il est nécessaire que leurs normes vérifient l'une des conditions*, qui sont équivalentes:

$$|m-n| < |2c-S| \quad \text{ou} \quad (m+n)^2 < D.$$

Cette *condition est suffisante* pour que les deux idéaux soient simultanément semi réduits.

Pour chaque idéal, la racine est finale ou initiale, suivant que $2c-S$, qui ne peut être nul, est positif ou négatif.

L'équivalence des deux comparaisons résulte du calcul immédiat:

$$(m-n)^2 < (2c-S)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (m+n)^2 < (2c-S)^2 + 4m \times n$$
$$= (2c-S)^2 - 4F(c) = D.$$

Pour établir leur nécessité, on calcule les valeurs de $F(x)$, pour les racines de **M**, précédant et suivant immédiatement la racine c. On obtient aisément les expressions, qui ne peuvent être nulles:

$$F(c-m) = m \times [(m-n) - (2c-S)];$$
$$F(c+m) = m \times [(m-n) + (2c-S)].$$

Pour que **M** soit semi réduit et que c en soit racine finale, ou initiale, il faut et il suffit que, suivant le cas:

c finale: $2c-S > 0$; $F(c-m) < 0$; $F(c) < 0$; $F(c+m) > 0$;
c initiale: $2c-S < 0$; $F(c-m) > 0$; $F(c) < 0$; $F(c+m) < 0$.

Il est équivalent de dire que les crochets, qui ne peuvent être nuls, doivent avoir les mêmes signes que leurs seconds termes. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que la valeur absolue $|2c-S|$ de ces termes soit supérieure à la valeur absolue $|m-n|$, des premiers termes.

Réciproquement si cette condition est remplie, elle l'est à la fois pour **M** et **N**, puisque $m—n$ n'intervient que par sa valeur absolue. Elle suffit donc pour que **M** et **N**, associés relativement à la racine c, soient semi réduits et admettent c comme racine, finale ou initiale suivant le signe de $2c—S$.

La simultanéité des conditions suffisantes peut encore être exprimée sous la forme de l'existence d'idéaux (en général différents) associés à un même idéal semi réduit:

si un idéal **M** *est semi réduit, les idéaux* $\mathbf{N}_i$ *et* $\mathbf{N}_f$, *associés à* **M**, relativement à ses racines c_i initiale et c_f finale:

$$\mathbf{M}\begin{cases} = (m,\ \theta—c_i); & F(c_i) = —m\times n_i; \quad \mathbf{N}_i = (n_i,\ \theta—c_i); \\ = (m,\ \theta—c_f); & F(c_f) = —m\times n_f; \quad \mathbf{N}_f = (n_f,\ \theta—c_f); \end{cases}$$

sont semi réduits et c_i, c_f en sont, respectivement, les racines initiale pour $\mathbf{N}_i$, finale pour $\mathbf{N}_f$.

Sauf précision contraire, on utilisera, de préférence, les couples d'*idéaux associés, relativement à leur racine finale* (en sous entendant l'indication de cette racine), donc pour une valeur positive de $2c—S$, et, par suite pour une valeur non négative de c.

Tout idéal réduit est, ainsi qu'il a été dit (**40**), a fortiori semi réduit. La réciproque n'est pas vraie, on peut seulement affirmer que

dans tout couple d'idéaux semi réduits, associés, relativement à une racine c (finale ou initiale):

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta—c), \quad \mathbf{N} = (n,\ \theta—c); \qquad m \leqslant n;$$

le premier, au moins, **M** (de norme au plus égale à celle du second) *est réduit.*

La norme m, de l'idéal considéré a un carré au plus égal à $|F(c)| = m\times n$. On détermine la racine minimum $\bar{c}$, de cet idéal **M**; la valeur $F(\bar{c})$ est aussi négative et de valeur absolue maximum (**38**). Donc:

$$m^2 \leqslant |F(c)| \leqslant |F(\bar{c})|;$$

M vérifie bien la condition de réduction (**35**).