43. Idéaux semi réduits remarquables.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Un **idéal** (canonique) **semi réduit M**, de racine finale c, est caractérisé par:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta - c) = (m,\ \theta - c_1); \qquad c_1 \equiv c, \quad (\text{mod. } m);$$
$$0 < 2c - S; \quad F(c) = -m \times n; \quad |m - n| < 2c - S [\text{ou } (m+n)^2 < D]$$

Son **idéal associé N** (relativement à sa racine finale c), qui est aussi semi réduit, est:

$$\mathbf{N} = (n,\ \theta - c) = (n,\ \theta - c_2); \qquad c_2 \equiv c, \quad (\text{mod. } n).$$

Son **idéal conjugué M'**, qui est aussi semi réduit, de même norme et de racine finale c', est:

$$\mathbf{M}' = (m,\ \theta - c'); \qquad c' \equiv S - c, \quad (\text{mod. } m);$$
$$F(c') < 0 < F(c' + m);$$

on peut évidemment remplacer la racine finale c' par tout entier c'_1, congru à c' (ou à $S - c$), mod. m.

43. Idéaux semi réduits remarquables.

Par analogie avec la notion des idéaux réduits remarquables dans un corps imaginaire (**29**), on peut donner les définitions suivantes.

Définitions. — Dans un corps quadratique réel, *parmi les idéaux semi réduits* (**42**), on peut **remarquer**, ou appeler **remarquables**:

1. un idéal qui est double (7) et qui est ainsi **semi réduit double**; il est égal à son conjugué.

2. un idéal qui est réfléchi, ou égal à son associé relativement à sa racine finale et qui est ainsi **semi réduit réfléchi** (puisque la différence des normes des idéaux associés qui est nulle est inférieure à $2c - S$, qui ne l'est pas).

Théorème d'existence d'un idéal semi réduit double. — Pour qu'un idéal soit *semi réduit double*, il faut et il suffit que *sa norme m soit un diviseur du discriminant D et vérifie les comparaisons*:

1. Si D *est impair*, ou si $D = 4d$, d *impair et* m *pair*: $m^2 < D$.

2. Si $D = 4d$ et m *diviseur de* d: $m^2 < d = D:4$.

Comme D ne peut avoir d'autre facteur carré que 4 (éventuellement), m^2 ne peut être égal, ni à D, ni à $d = D:4$ (il n'y a pas de corps réel, de discriminant égal à 4).

Pour qu'un idéal canonique soit double (**7**), il faut et il suffit que sa norme divise le discriminant; c'est la conséquence de l'étude de la congruence fondamentale (**6**). La condition supplémentaire de semi réduction résulte de l'examen des deux cas.

Dans le *premier cas*, m ne divisant pas $D:4$, on utilise l'expression du polynôme:

$$4F(x) = (2x-S)^2-D;$$

on obtient des zéros conjugués, mod. m:

$$c = (S+m):2 \quad c' = S-c = (S-m):2; \qquad (c' = c-m);$$

qui sont des *racines consécutives* de l'idéal, de norme m, pour lesquelles les valeurs du polynôme sont égales:

$$4F(c) = 4F(c') = m^2-D.$$

Si $m^2 < D$, ces deux valeurs sont négatives, c'est la propriété caractéristique de semi réduction (**40**) de l'idéal, de norme m et de racines c ou c'.

Si $m^2 > D$, les deux racines c et c' et tous les autres termes de la progression:

$$c'-\lambda m; \; c+\lambda m; \; \lambda \text{ entier positif}$$

donnent à $F(x)$ des valeurs positives; l'idéal ne peut être réduit.

Dans le *deuxième cas*, on utilise l'expression du polynome:

$$F(x) = x^2-d; \qquad D = 4d.$$

m étant un diviseur de d, les entiers $-m$, 0, $+m$ sont des racines consécutives de l'idéal double, de norme m.

Si $m^2 < d$, les valeurs:

$$F(-m) = F(+m) = m^2-d,$$

sont négatives, de même que $F(0) = -d$; l'idéal est semi réduit.

Si $m^2 > d$, la valeur $F(0) = -d$ est encore négative, mais toutes les autres valeurs $F(\lambda m)$, pour tout entier λ non nul, sont positives, il n'existe pas de racines consécutives de l'idéal qui donnent à $F(x)$ des valeurs négatives; l'idéal n'est pas semi réduit.

Théorème d'existence d'un idéal semi réduit réfléchi. — Pour qu'un idéal, de norme m, soit *semi réduit réfléchi, il faut et il suffit que le discriminant D soit égal à la somme des carrés de deux nombres entiers*, dont un égal à $2m$:

$$D = a^2+4m^2 \begin{cases} a \text{ impair, si } D \text{ est impair;} \\ a \text{ pair, si } D \text{ est multiple de 8.} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'idéal semi réduit réfléchi, dans un corps dont le discriminant est quadruple d'un nombre impair ($D = 4d$; d impair).

Ainsi qu'il a été déjà vérifié (**16**), la condition de décomposition est manifestement nécessaire et suffisante pour que l'idéal:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta-c); \qquad 2c-S = a;$$

soit réfléchi, relativement à la racine c, qui donne à $F(x)$ la valeur négative $-m^2$.

Il n'y a pas de condition de comparaison: les deux facteurs de la décomposition de $-F(c)$ étant égaux, leur différence est nulle, donc inférieure à $2c-S = a$, qui ne peut être nul.

Exemples. — Dans le corps de discriminant impair $145 = 5\times 29$ (tableau XXII), les facteurs du discriminant D, de carré au plus égal à D sont 1 et 5, qui sont les normes des deux idéaux semi réduits doubles:

$$(\mathbf{1},\ \theta) \qquad (\mathbf{5},\ \theta-2).$$

Aux deux décompositions du discriminant:

$$145 = 9^2+4\times 4^2, \qquad 145 = 1^2+4\times 6^2,$$

correspondent les idéaux semi réduits réfléchis:

$$(\mathbf{4},\ \theta-4) = (\mathbf{4},\ \theta); \qquad (\mathbf{6},\ \theta),$$

de racines finales respectives 4 et 0.

Les idéaux conjugués:

$$(\mathbf{4},\ \theta+5) = (\mathbf{4},\ \theta-3), \qquad (\mathbf{6},\ \theta+1) = (\mathbf{6},\ \theta-5),$$

également semi réduits, sont réfléchis, mais relativement à leurs racines *initiales* —5 et —1 (tableau XXIII).

Dans le corps de discriminant pair $232 = 8\times 29 = 4\times 58$ (tableau XXII), la congruence fondamentale, qui a une racine double, mod. 2, est impossible mod. 4. Les normes des idéaux doubles ne peuvent être divisibles par 4 et sont des diviseurs de 58. Les seuls dont le carré est inférieur à 58 sont 1 et 2, qui sont les normes des idéaux réduits doubles $(\mathbf{1},\ \theta)$ et $(\mathbf{2},\ \theta)$.

Aux deux décompositions du discriminant:

$$232 = 6^2+4\times 7^2; \qquad 232 = 14^2+4\times 3^2;$$

(qui sont composées des mêmes termes, mais où le quadruple du carré mis en évidence n'est pas le même) correspondent les idéaux semi réduits réfléchis:

$$(\mathbf{7},\ \theta-3), \qquad (\mathbf{3},\ \theta-7) = (\mathbf{3},\ \theta-1),$$

de racines finales respectives 3 et 7. Les idéaux conjugués sont encore en évidence dans le tableau XXIII.

L'*idéal unité* est, dans tous les cas *un idéal semi réduit double*, sa norme 1 est diviseur de D comme de $D:4$ et son carré est inférieur à cette valeur. Sa racine finale est le plus grand entier c, qui donne à $F(x)$ une valeur négative; son idéal associé est l'idéal principal $(-F(c),\ \theta-c) = (\theta-c)$.

Si cet entier c donne à $F(x)$ la valeur —1, l'idéal associé est égal à l'idéal unité, qui est alors, à la fois, semi réduit double et réfléchi.

44. Cycles d'idéaux semi réduits.

On va établir que, dans un corps quadratique réel, les idéaux semi réduits peuvent être *répartis en* (un ou plusieurs) *cycles*, d'idéaux congrus entre eux. Par cycle, on entend un système de termes, en nombre fini, *ordonnés circulairement.*

A cet effet on définit et on justifie la relation d'ordre, puis la répartition qui en résulte; on vérifie la congruence, ou l'appartenance à une même classe des idéaux d'un cycle.