46. Suite de bases d'un idéal semi réduit.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les autres multiplicateurs sont des produits de ceux là par des puissances de $\omega = \rho_3$, qui est égal à:

$$\omega = \rho_3 = \rho_2 \times (\theta - 5) : 1 = (-\theta + 6) \times (\theta - 5) : 6 = 2\theta - 11.$$

On vérifie aisément que ω et, par suite ses puissances et leurs opposées sont des diviseurs de l'unité; il suffit de calculer la norme de ω:

$$N(\omega) = \omega \times \omega' = (2\theta - 11) \times (2\theta' - 11) = -4 \times 36 + 22 + 121 = -1.$$

Pour le cycle de 5 idéaux:

$$\mathbf{M}_0 = (5,\ \theta - 2),\quad \mathbf{M}_1 = (6,\ \theta - 3),\quad \mathbf{M}_2 = (4,\ \theta - 4),$$
$$\mathbf{M}_3 = (4,\ \theta - 3),\quad \mathbf{M}_4 = (6,\ \theta - 2);$$

les multiplicateurs sont:

$$\rho_0 = 1,\quad \rho_1 = (\theta - 2) : 6,\quad \rho_2 = (-\theta + 7) : 4,\quad \rho_3 = (3\theta - 16) : 4,$$
$$\rho_4 = (-7\theta + 39) : 6;\ \omega = \rho_5 = 2\theta - 11.$$

On retrouve la valeur précédente.

Dans le cas d'un cycle d'un seul idéal $(1,\ \theta - c)$, les multiplicateurs sont les puissances de:

$$\omega = \rho_1 = (\theta - c);$$

cet élément est d'ailleurs manifestement un diviseur de l'unité:

$$(\theta - c) \times (\theta' - c) = F(c) = -1.$$

46. Suite de bases d'un idéal semi réduit.

A un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i$ auquel est associé une suite de multiplicateurs ρ_i, on peut aussi associer une suite de bases, arithmétiques libres de l'idéal $\mathbf{M}_0$ (qui peut être choisi arbitrairement dans le cycle, ou même être remplacé par un idéal $(\gamma) \times \mathbf{M}_r$).

Théorème de la suite des bases. — *Dans l'idéal* $\mathbf{M}_0$, d'un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i = (m_i,\ \theta - c_i)$, *on peut construire une suite*, doublement illimitée, d'*éléments* α_i (entiers de $\mathbf{M}_0$), par les relations:

$$\alpha_i = m_i \times \rho_i = (\theta - c_{i-1}) \times \rho_{i-1};$$
$$\alpha_{i+1} = m_{i+1} \times \rho_{i+1} = (\theta - c_i) \times \rho_i;$$

Tout couple d'éléments successifs α_i, α_{i+1} *constitue une base arithmétique libre de* $\mathbf{M}_0$.

Les ρ_i sont les multiplicateurs définis ci-dessus par la relation de récurrence, de coefficients m_i, $\theta - c_i$; il en résulte l'égalité des deux expressions données pour chaque élément.

D'autre part le couple d'éléments m_i, $\theta - c_i$ est la base canonique, donc arithmétique libre, de l'idéal $\mathbf{M}_i$; son produit par ρ_i est donc encore une base arithmétique libre de l'idéal congru $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$, qui est précisément $\mathbf{M}_0$ (**24**). Notamment pour $i = 0$, on trouve la base canonique de $\mathbf{M}_0$: m_0 et $\theta - c_0$.

On peut calculer directement les α_i par la relation de récurrence, déduite de leur définition:

$$\alpha_0 = m_0; \qquad m_i \times \alpha_{i+1} = (\theta - c_i) \times \alpha_i.$$

Ils ont la même périodicité de multiplication que les multiplicateurs ρ_i; l'expression de ω résulte immédiatement de leur récurrence:

$$\alpha_{r+\mu h} = \alpha_r \times \omega^\mu; \qquad \omega = [\Pi(\theta - c_i)] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1.$$

On vérifie ci-dessous (**48**) par un calcul direct, que les α_i sont bien des entiers de l'idéal et on indique une loi de récurrence linéaire.

Exemples. — Corps de discriminant 145 (tableau XXII) et cycle engendré par l'idéal unité $\mathbf{M}_0 = (1, \theta - 5)$:

i	c_i	m_i	
..	..	..	
—1	5	6	$\alpha_{-1} = 1:[(\theta-5):6] = -\theta'+5 = \theta+6;$
0	**5**	**1**	$\alpha_0 = 1$
1	**0**	**6**	$\alpha_1 = 1 \times [(\theta-5):1] = \theta-5;$
2	**5**	**6**	$\alpha_2 = \alpha_1 \times [\theta:6] = [(\theta-5)\theta]:6 = -\theta+6$
3	5	1	$\alpha_3 = \alpha_2 \times [(\theta-5):6] = (-\theta+6) \times (\theta-5):6 = 2\theta-11 = \omega.$
..	..	..	... ...

Dans le cas d'un cycle d'un seul idéal $(1, \theta - c)$, les multiplicateurs ρ_i et les termes des bases α_i sont les puissances de $\theta - c$:

$$\ldots (\theta - c)^{-1} = -\theta' + c, \quad 1, \quad \theta - c, \quad (\theta - c)^2, \ldots$$

On peut caractériser les bases ainsi construites par des comparaisons de grandeurs entre leurs éléments et, éventuellement, avec les éléments de l'idéal, considérés comme des *nombres réels*. Pour ce faire il convient de distinguer les deux zéros (irrationnels, mais réels) de $F(x)$; on convient de désigner par θ (lettre non accentuée) celui qui est positif. On peut alors énoncer une autre condition de semi réduction.

Théorème caractéristique de semi réduction. — *Pour qu'un idéal* $\mathbf{M} = (m, \theta - c)$ *soit semi réduit*, et admette c comme racine finale, *il faut et il suffit que*: les nombres qui constituent sa base vérifient les conditions de comparaison:

$$0 < (\theta - c) : m < 1; \qquad (\theta' - c) : m < -1.$$

Les conditions de semi réduction peuvent être exprimées par le signe des valeurs de $F(x)$ pour les trois racines successives, encadrant la racine finale c:

$$F(c - m) < 0; \quad F(c) < 0; \quad F(c + m) > 0.$$

Il est équivalent de dire que $c - m$ et c sont compris entre les zéros θ' et θ et que $c + m$ est supérieur à θ (sans égalités possibles, $F(x)$ n'ayant pas de zéro rationnel). Cette condition peut être exprimée par:

$$\theta' < c - m < c < \theta < c + m \quad \Leftrightarrow \quad (\theta' - c) < -m < 0 < (\theta - c) < m$$
$$\Leftrightarrow \quad (\theta' - c) : m < -1 \quad \textit{et} \quad 0 < (\theta - c) : m < +1.$$

De cette condition, on déduit les propriétés suivantes des multiplicateurs ρ_i et de la suite des termes α_i des bases de $\mathbf{M}_0$.

Les multiplicateurs ρ_i sont positifs et tendent vers 0, lorsque i tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ lorsque i tend vers $-\infty$.

Les éléments α_i de la suite des bases réduites sont positifs décroissants, de $+\infty$ à 0 (pour i de $-\infty$ à $+\infty$).

Les conjugués α_i' de ces éléments sont alternativement positifs et négatifs; leurs valeurs absolues sont croissantes, de 0 à $+\infty$ (pour i de $-\infty$ à $+\infty$).

Les limites pour i infini des multiplicateurs ρ_i et des éléments α_i résultent de leur appartenance à des progressions géométriques. La raison ω, de ces progressions est le produit de quotients $(\theta - c_i) : m_i$ (i de 0 à $h-1$) positifs et inférieurs à 1; elle est donc inférieure à 1, d'où les limites des termes des progressions.

La croissance des éléments α_i et de leurs conjugués α'_i, et la comparaison (des signes) des éléments consécutifs, résulte de leur construction au moyen des bases de $\mathbf{M}_i$, qui sont semi réduits:

$$\alpha_{i+1} : \alpha_i = [\rho_i \times (\theta - c_i)] : [\rho_i \times m_i] = (\theta - c_i) : m_i < 1,$$
$$\alpha'_{i+1} : \alpha'_i = [\rho'_i \times (\theta' - c_i)] : [\rho'_i \times m_i] = (\theta' - c_i) : m_i < -1.$$

47. Détermination des cycles.

La considération de la suite des bases de $\mathbf{M}_0$ permet d'établir que les cycles d'idéaux semi réduits représentent les classes *proprement.*

THÉORÈME de la détermination des cycles. — Dans un corps réel, *chaque classe d'idéaux contient un et un seul cycle d'idéaux semi réduits.*

En définissant les idéaux (canoniques) réduits (**20**), pour un corps quadratique quelconque (réel ou imaginaire), il a été établi que toute classe d'idéaux contient au moins un idéal $\mathbf{M}_0$ réduit, qui, pour un corps réel, est, a fortiori, semi réduit (**40**). La classe renferme, par suite, le cycle des idéaux réduits $\mathbf{M}_i$, obtenus en formant les suivants successifs de $\mathbf{M}_0$, puisque ces idéaux sont congrus à $\mathbf{M}_0$.

Pour établir que le cycle ainsi construit est unique, on peut d'abord démontrer que:

dans un idéal $\mathbf{M}_0$ semi réduit, *pour qu'une base arithmétique libre*, de deux éléments positifs $\gamma_j > \gamma_{j+1}$, *appartienne à la suite des bases*, $\alpha_i \alpha_{i+1}$, associée au cycle d'idéaux semi réduits engendré par $\mathbf{M}_0$, *il faut et il suffit que*: ces termes et leurs conjugués vérifient les comparaisons:

$$\gamma_{j+1} : \gamma_j < 1; \qquad \gamma'_{j+1} : \gamma'_j < -1;$$

la première résulte de l'ordre adopté pour numéroter les deux termes.