Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 50. Justification des types.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4. *Le cycle ne contient pas d'idéaux remarquables*, notamment pas d'idéal unité. Les conjugués de ses idéaux forment un cycle différent, dont les idéaux sont respectivement associés à ceux du précédent. Les deux cycles peuvent être qualifiés *conjugués et associés;* ils définissent deux classes d'idéaux différentes conjuguées et inverses.

Les cycles des trois premiers types (précédents) sont conjugués et associés à eux-mêmes; ils définissent des classes doubles.

Le corps de discriminant 145 (tableaux XXII et XXIV) contient, en plus de deux cycles de type 1, deux cycles conjugués (et associés), de chacun trois idéaux:

$$(3,\ \theta-3) \to (8,\ \theta-4) \to (2,\ \theta-5);\quad (3,\ \theta-5) \to (2,\ \theta-4) \to (8,\ \theta-3).$$

Les conjugués des idéaux, d'indices 0, 1, 2, du premier cycle sont respectivement les idéaux d'indices 0, 2, 1, du second cycle (somme des indices congrue à 0, mod. 3); leurs associés sont respectivement les idéaux d'indices 2, 1, 0 (somme des indices congrue à —1, mod. 3). Les sens de circulation sur les deux schémas sont opposés.

50. Justification des types.

Pour établir que les quatres types de cycles sont les seuls possibles, on va étudier, comme il a été dit, le numérotage des éléments des cycles; en comparant deux cycles, non nécessairement différents, dont chacun contient les associés et par suite aussi les conjugués (dans un ordre différent) des termes de l'autre.

Théorème de la correspondance des indices. — Dans un corps réel, *pour que deux cycles* (éventuellement égaux), d'idéaux semi réduits, $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{N}_j$, *contiennent chacun les idéaux associés*, et, par suite aussi, conjugués, *des idéaux de l'autre, il suffit* (et il faut évidemment) :

qu'*il existe un terme* $\mathbf{M}_p$, de l'un, *et un terme* $\mathbf{N}_q$, de l'autre, *qui soient conjugués;*

ou qu'*il existe un terme* $\mathbf{M}_p$ *et un terme* $\mathbf{N}_{q-1}$, *qui soient associés*, relativement à leur racine finale, commune.

Chacune des deux conditions entraîne l'autre; les deux cycles ont alors le même nombre h de termes et les indices des idéaux qui se correspondent par conjugaison, ou par association, ont une somme constante, mod. h:

$$\mathbf{M}_i \text{ et } \mathbf{N}_j \text{ conjugués} \Leftrightarrow i+j \equiv p+q, \qquad (\text{mod. } h),$$
$$\mathbf{M}_{i'} \text{ et } \mathbf{N}_{j'} \text{ associés} \Leftrightarrow i'+j' \equiv p+q-1, \quad (\text{mod. } h).$$

Pour la première condition, on vérifie que:

$$\mathbf{M}_p \text{ et } \mathbf{N}_q \text{ conjugués} \Rightarrow \mathbf{M}_{p+1} \text{ et } \mathbf{N}_{q-1} \text{ conjugués},$$

ce qui résulte des égalités de définition de la succession dans les cycles considérés (**44**), qui peuvent être mis sous les formes suivantes, en tenant compte de la réciprocité de la conjugaison et de l'association

$$(\text{associé de } \mathbf{N}_{q-1}) = (\text{conjugué de } \mathbf{N}_q) = \mathbf{M}_p$$
$$\Rightarrow \mathbf{N}_{q-1} = (\text{associé de } \mathbf{M}_p) = (\text{conjugué de } \mathbf{M}_{p+1}).$$

On en déduit, par récurrence sur les indices, λ étant a priori, indéfini,

$$\mathbf{M}_{p+\lambda} \text{ et } \mathbf{N}_{q-\lambda} \text{ conjugués}; \quad [(p+\lambda)+(q-\lambda) = p+q].$$

En outre si h est le nombre d'idéaux $\mathbf{M}_i$, leur périodicité entraîne:

$$\mathbf{M}_{p+h} = \mathbf{M}_p \Rightarrow \mathbf{N}_{q-h} = \mathbf{N}_q.$$

Le nombre d'idéaux $\mathbf{N}_j$ est aussi h et l'égalité des sommes d'indices est une congruence, mod. h.

D'autre part l'égalité de succession entraîne:

$$\text{associé de } \mathbf{N}_{q-\lambda-1} = (\text{conjugué de } \mathbf{N}_{q-\lambda}) = \mathbf{M}_{p+\lambda};$$

de sorte que la relation entre les indices i' et j' d'idéaux respectivement associés est bien:

$$i'+j' \equiv (p+\lambda)+(q-\lambda-1) \equiv p+q-1, \quad (\text{mod. } h).$$

La démonstration est corrélative et la propriété reste valable pour la deuxième condition (existence d'un couple d'idéaux associés).

Cette propriété acquise, on obtient les trois premiers types de cycles, en considérant *un cycle* (ou deux cycles égaux) *qui renferme les conjugués. et par suite les associés de chacun de ses termes. Il suffit*, pour cela, de constater *qu'il renferme:*

le conjugué d'un de ses idéaux (éventuellement double);
ou *l'associé d'un de ses idéaux* (éventuellement réfléchi).

1. Si un tel cycle a un *nombre impair d'idéaux*, il contient *un* (et un seul) *idéal double et un* (et un seul) *idéal réfléchi;* il est du *type* 1.

Les idéaux conjugués et associés étant respectivement définis par les congruences:

$$i+j \equiv a; \quad i'+j' \equiv a-1, \quad (\text{mod. } h);$$

l'indice x, d'un idéal double et l'indice x' d'un idéal réfléchi sont déterminés par les équations congruentielles:

$$2x \equiv a; \quad 2x' \equiv a-1, \quad \text{mod. } h.$$

Comme h est impair (premier avec 2) chacune a une et une seule solution.

2 et 3. Si un tel cycle a un *nombre pair d'idéaux*, il contient, *ou bien deux idéaux doubles*, ou *bien deux idéaux réfléchis;* il est soit du *type* 2, soit du *type* 3.

Comme h est pair, une seule des équations congruentielles précédentes est possible; celle dont le second membre, a ou $a-1$ est un entier pair. Elle a alors deux solutions de différence $h:2$ (mod. h).

Pour $h = 2$, le type 2 est le seul possible (ainsi qu'il a déjà été dit), car si deux idéaux successifs $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_1$ du cycle étaient associés, ils seraient aussi conjugués, puisque:

$$\mathbf{M}_1 = \text{associé de } \mathbf{M}_0 = \text{conjugué de } \mathbf{M}_1.$$

Les deux idéaux auraient des normes égales et des racines égales, donc seraient égaux; le cycle n'aurait qu'un seul terme, l'idéal unité.

4. Par contraposition des propriétés précédentes, *un cycle qui ne contient pas d'idéal semi réduit remarquable*, ne peut contenir de couples, ni d'idéaux conjugués, ni d'idéaux associés; *il n'est pas égal à son cycle conjugué*, qui lui est aussi associé, il est du *type* 4.

Dans la notation indicielle, de deux cycles conjugués, de type 4, d'ordre h, les indices d'idéaux conjugués ont une somme constante, qui peut être choisie arbitrairement (notamment 0, mod. h); les

indices des idéaux associés ont alors pour somme constante $a-1$ (notamment -1, mod. h). Ce sont ces constantes 0 et -1 qui ont été adoptées dans l'exemple des tableaux XXII et XXIV.

La constante de la somme des indices d'idéaux correspondants, dont, par ailleurs les points correspondants ont même abscisse, ou même ordonnée, explique la différence des sens de parcours sur les schémas. On peut aussi remarquer que les conjugués d'un idéal et de son suivant sont un idéal et son précédent.

51. Structure du groupe des classes d'idéaux.

Dans un corps réel, pour établir la table de PYTHAGORE (de la multiplication) des classes d'idéaux, il suffit d'établir celle des cycles qui les caractérisent, ou les représentent proprement.

Pour multiplier deux cycles, on en choisit des représentants, qui figurent dans des décompositions (convenables) de valeurs de la table (éventuellement prolongée). Comme, dans le cas d'un corps imaginaire, on cherche, au besoin par récurrence, un idéal semi réduit qui soit congru à ce produit; le cycle auquel appartient cet idéal est le produit des cycles considérés; ou, plus exactement, détermine la classe qui est le produit des classes représentées par les cycles multipliés.

Dans un corps qui n'a qu'un petit nombre de cycles (ce qui est le cas pour des discriminants relativement petits), la détermination de la structure du groupe des classes (ou des cycles) est, en général aisée; elle peut être facilitée par la considération du nombre de cycles, qui est l'ordre du groupe. Si cet ordre est un nombre premier le groupe est cyclique et chacun de ses termes, différent de l'unité (ou de la classe principale) en est un générateur. Si l'ordre est un produit de nombres premiers différents, le groupe est encore cyclique, mais il y a lieu de chercher ses générateurs; ce sont les termes dont l'ordre est égal à celui du groupe. Dans le cas général, la comparaison de l'ordre de certains termes à l'ordre du groupe peut permettre d'affirmer que le groupe est, ou n'est pas cyclique.

Le tableau XXVII donne un exemple de recherche de la structure du groupe des classes, pour un corps de discriminant assez élevé; 62 501; dont le polynôme fondamental est $F(x) = x^2+x-15\,625$.