CHARAKTERISTISCHE KLASSEN UND ANWENDUNGEN

Autor(en): **Atiyah, M. F. / Hirzebruch, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37131

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

CHARAKTERISTISCHE KLASSEN UND ANWENDUNGEN

von M. F. Atiyah und F. Hirzebruch

In diesem Vortrag *) soll über die „Cohomologie-Theorie" berichtet werden, die man mit Hilfe der Bottschen Theorie [8, 9] aus der unitären Gruppe ableiten kann [4]. In anderen Worten: Es handelt sich um eine Cohomologie-Theorie, die mit Hilfe komplexer Vektorraum-Bündel konstruiert wird. Diese Cohomologie-Theorie genügt den üblichen Axiomen [11] bis auf das Dimensionsaxiom: Die Cohomologie-Gruppen des einpunktigen Raumes sind nämlich in allen geraden Dimensionen unendlich-zyklisch. Die charakteristischen Klassen ergeben Beziehungen zwischen der neuen Cohomologie-Theorie und der üblichen. Nun ist bereits auf dem Symposium in Tucson (Arizona), siehe [4], ausführlicher über diese Dinge berichtet worden. Deshalb wollen wir hier diese Theorie mit etwas anderen Aspekten schildern. Wir errinnern in einem ersten Paragraphen an die historische Entwicklung der Theorie der charakteristischen Klassen. In § 2 und § 3 besprechen wir die neue Cohomologie-Theorie, wobei in § 3 einige interessante Gesichtspunkte auftreten, die noch nicht veröffentlicht sind. In § 4 kommt das differenzierbare Analogon des Riemann-Rochschen Satzes vor [3], aus dem sich Homotopieinvarianz-Eigenschaften der Pontrjaginschen Klassen erhalten lassen. Wir benutzen die Gelegenheit, eine bisher noch nicht veröffentlichte Rechnung, die die Invarianz mod 8 liefert, darzustellen. In § 5 erinnern wir an Einbettungsfragen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Diese wurden in einem Vortrag auf dem Symposium in Lille [5] gebracht. Wir ziehen eine merkwürdige Folgerung für Mannigfaltigkeiten M^{4k}, die in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+4$ eingebettet werden können.

---

*) Internationales Kolloquium über Differentialgeometrie und Topologie (Zürich, Juni 1960). Der Vortrag wurde von F. Hirzebruch gehalten.

Die vorliegende Arbeit ist direkt aus dem Vortrag hervorgegangen. Das erklärt, warum häufig unnötig starke Voraussetzungen gemacht werden. Sie sollten Redner und Zuhörern das Leben erleichtern.

Besonders schöne Anwendungen der Theorie der charakteristischen Klassen hat Milnor in seinen Untersuchungen über die differenzierbaren Strukturen der Sphären gegeben. Darauf und auf viele andere Anwendungen konnte hier nicht eingegangen werden.

§ 1. Einführung.

1.1. Gegeben sei eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X. Eine klassische Frage ist: Besitzt X ein stetiges Feld von Tangentialvektoren, das in keinem Punkte von X verschwindet ? Die Antwort lautet: X besitzt genau dann ein solches Feld, wenn die Euler-Poincarésche Charakteristik von X gleich Null ist. (Satz von Hopf [2].)

1.2. Die Menge aller Tangentialvektoren von X bildet einen Raum E mit einer Projektion $\pi: E \to X$, die jedem Vektor seinen Fusspunkt zuordnet. Die obige Frage (1.1) kann auch so formuliert werden: Gibt es einen „Schnitt" $s: X \to E$ mit $s(x) \neq 0$ für alle $x \in X$? Ein Schnitt s in dem Vektorraum-Bündel (E, X, π) ist dabei eine stetige Abbildung $s: X \to E$, für die $\pi \circ s$ gleich der identischen Abbildung von X auf X ist.

1.3. Eine der ersten Arbeiten zur Theorie der charakteristischen Klassen ist die Dissertation von Stiefel [16]. Stiefel verwendet die Homologietheorie. Die cohomologische Darstellung geht unmittelbar aus der Stiefelschen Arbeit hervor. Wir wollen hier die Cohomologie verwenden; das ist ohnehin unerlässlich, wenn man nicht nur das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit sondern beliebige reelle Vektorraum-Bündel betrachten will.

Stiefel hat einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X Cohomologie-Klassen $w_i \in H^i(X; \mathbf{Z}_2)$ zugeordnet ($w_0 = 1$), welche folgende Eigenschaft haben:

Wenn es ein r-tupel von Schnitten $s_i: X \to E$ $(i=1, \ldots, r)$ gibt, so dass $s_1(x), \ldots, s_r(x)$ für alle $x \in X$ als Vektoren des reellen Vektorraumes $\pi^{-1}(x)$ linear-unabhängig sind, dann verschwindet w_i

für $i > n - r$. (Ist $r = n$, dann heisst X parallelisierbar. In diesem Falle ist $w_i = 0$ für $i > 0$.)

Es sei $n = \dim X$. Der Wert von w_n auf dem Grundzyklus $[X] \in H_n(X; \mathbf{Z}_2)$ ist gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von X (reduziert modulo 2), was die gerade erwähnte Eigenschaft der Stiefelschen Klassen mit dem Satz von Hopf (1.1) in Verbindung setzt.

1.4. Wir definieren die totale Stiefel-Whitneysche Klasse

$$w \in H^*(X; \mathbf{Z}_2) = \sum_{i=0}^{n} H^i(X; \mathbf{Z}_2), \qquad n = \dim X,$$

durch die Gleichung

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i = 1 + w_1 + \ldots + w_n. \tag{1}$$

Für den reellen projektiven Raum $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ hat Stiefel [17] die Klasse w bestimmt. Es gilt

$$w(\mathbf{P}_n(\mathbf{R})) = (1+g)^{n+1}, \tag{2}$$

wo g das von 0 verschiedene Element von $H^1(\mathbf{P}_n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ ist.

Wenn $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ parallelisierbar ist, dann müssen die positivdimensionalen Stiefelschen Klassen von $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ verschwinden, oder (gleichbedeutend) es muss $w(\mathbf{P}_n(\mathbf{R})) = 1$ sein. (2) und bekannte Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ergeben, dass $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ nur dann parallelisierbar sein kann, wenn $n+1$ eine Potenz von 2 ist [17]. Also kann die Sphäre $\mathbf{S}^n$ nur dann „antipodentreu" parallelisierbar sein, wenn $n+1$ eine Potenz von 2 ist.

Über die Parallelisierbarkeit von $\mathbf{S}^n$ lässt sich mit der hier geschilderten Methode keine Aussage erhalten, da die Klasse $w(\mathbf{S}^n)$ gleich 1 ist. Dennoch ist heute bekannt, dass $\mathbf{S}^n$ nur für $n = 1, 3, 7$ parallelisierbar ist. Der Beweis erfolgt entweder mit Hilfe der Resultate von Adams [1] über die Hopfsche Invariante oder mit Hilfe der Bottschen Theorie und der charakteristischen Klassen [13]. Es werde auf den Vortrag von Bott auf diesem Symposium verwiesen.

1.5. Unabhängig von Stiefel hat Whitney [18] die Klassen $w_i \in \mathrm{H}^i(X; \mathbf{Z}_2)$ für ein *reelles* Vektorraum-Bündel (E, X, π) mit

X als Basis definiert. Die in 1.3 erwähnte Eigenschaft der w_i, die man heute Stiefel-Whitneysche Klassen nennt, gilt unverändert.

Später hat dann Chern [10] die Chernschen Klassen $c_i \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$ für ein *komplexes* Vektorraum-Bündel über dem Raum X und Pontrjagin (siehe z.B. [14]) die Pontrjaginschen Klassen $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$ für ein *reelles* Vektorraum-Bündel über X eingeführt. Heute definiert man die Pontrjaginsche Klasse p_i eines reellen Vektorraum-Bündels ξ als das $(-1)^i$-fache der Chernschen Klasse c_{2i} der komplexen Erweiterung von ξ (siehe z.B. [12]). Man beachte, dass die c_i und p_i ganzzahlige Cohomologieklassen sind, während die w_i Klassen mit Koeffizienten in der Gruppe der Ordnung 2 sind.

1.6. In dem Vortrag von Steenrod auf diesem Symposium ist von Cohomologie-Operationen die Rede. Die Cohomologie-Operation Sq^i zum Beispiel ordnet jedem Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ ein Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ zu. Die charakteristische Klasse w_i ordnet jedem reellen Vektorraum-Bündel über X ein Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ zu. So wie eine Cohomologie-Operation eine natürliche Abbildung von der Cohomologietheorie in die Cohomologietheorie ist, so ist eine charakteristische Klasse eine natürliche Abbildung von der Theorie der Vektorraum-Bündel in die Cohomologietheorie. Diese Analogie hat eine tiefere Bedeutung. Wir wollen versuchen, das in diesem Vortrag für den Fall der *komplexen* Vektorraum-Bündel näher auseinanderzusetzen: Mit Hilfe aller komplexen Vektorraum-Bündel, die den gegebenen Raum X als Basis haben, können „Cohomologie-Gruppen" $K^n(X)$ definiert werden [4] (n beliebige ganze Zahl), die den Axiomen von Eilenberg-Steenrod [11] genügen bis auf das „Dimensionsaxiom", welches besagt, dass die Cohomologiegruppen des einpunktigen Raumes in den von 0 verschiedenen Dimensionen verschwinden. Die charakteristischen Klassen liefern natürliche Abbildungen von dieser neuen Cohomologietheorie in die übliche Cohomologietheorie.

§ 2. Eine neue Cohomologietheorie [4].

2.1. Es sei X ein endlicher Zellenkomplex (endlicher CW-Komplex). (Diese Annahme ist viel zu speziell; sie dient der

Bequemlichkeit der Darstellung.) Wir wollen abelsche Gruppen $K^n(X)$ definieren ($n \in \mathbf{Z}$), siehe 1.6. Zunächst geben wir die Definition von $K^0(X)$, das wir auch einfach $K(X)$ nennen.

$G(X)$ sei die Menge der (Isomorphieklassen von) komplexen Vektorraum-Bündeln über X, (wobei wir zulassen, dass ein Vektorraum-Bündel über den verschiedenen Zusammenhangskomponenten von X verschiedene Faser-Dimensionen hat). $F(X)$ sei die freie abelsche Gruppe, die von $G(X)$ erzeugt wird. Für Elemente $\xi', \xi'' \in G(X)$ ist die Whitneysche Summe $\xi' \oplus \xi''$, die entsteht, indem man in jedem Punkte von X die direkte Summe der Fasern von ξ' und ξ'' bildet, ein wohldefiniertes Element von $G(X)$. Die abelsche Gruppe $K(X)$ wird definiert als $F(X)$ modulo der Untergruppe, die von allen Elementen der Form $\xi' \oplus \xi'' - \xi' - \xi''$, wo $\xi', \xi'' \in G(X)$, erzeugt wird. Die Addition in $K(X)$ ist also durch die Whitneysche Summe induziert.

2.2. Wir arbeiten in der Kategorie der Paare (X, Y), wo X endlicher CW-Komplex und Y Teilkomplex von X ist. Ein Raum X kann auch als Paar $(X, \varnothing)$, wo $\varnothing$ die leere Menge ist, betrachtet werden. Ein Raum X mit ausgezeichnetem Basispunkt x_0 kann als Paar (X, x_0) angesehen werden. Zu einem Raum X gibt es den Raum X^+, der die disjunkte Vereinigung von X mit einem zusätzlichen Punkt ist, welcher in X^+ Basispunkt ist. Die n-fache Einhängung $S^n(X)$ eines Raumes X mit Basispunkt (vgl. z.B. [15]) ist wieder ein Raum mit Basispunkt. Ist in einem Raum ein Basispunkt ausgezeichnet, dann werde dieser immer mit pt bezeichnet. Ferner soll pt auch den einpunktigen Raum andeuten. Für ein Paar (X, Y) ist X/Y der Raum, der entsteht, wenn man Y auf einen Punkt zusammenzieht, der dann in X/Y die Rolle des Basispunktes übernimmt. Für die übliche Cohomologietheorie (bezüglich festgewählter Koeffizienten) hat man kanonische Isomorphismen

$$H^i(X, pt) \cong \text{Kern}\,[H^i(X) \to H^i(pt)] \tag{1}$$

$$H^i(X^+, pt) \cong H^i(X) \tag{2}$$

$$H^i(X, Y) \cong H^i(X/Y, pt) \tag{3}$$

$$H^i(X, pt) \cong H^{i+n}(S^n(X), pt)\,. \tag{4}$$

Kennt man also den kontravarianten Funktor H^j für Räume X, dann kennt man H^i $(i < j)$ für Paare (X, Y).

2.3. Der Funktor K ist kontravariant. Für eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ haben wir einen Homomorphismus $f^!\colon K(X) \to K(Y)$, der durch das Liften von Vektorraum-Bündeln gemäss f induziert wird. Die Gruppe $K(pt)$ ist unendlich-zyklisch ($G(pt)$ ist die Halbgruppe der ganzen nichtnegativen Zahlen). Der Funktor K^0 ist per definitionem gleich K. Verlangen wir (1)-(4) per definitionem für unsere K^n, dann ist also $K^n(X, Y)$ für $n \leqq 0$ definiert (vgl. [4] für Einzelheiten). Die K^n sind für $n < 0$ nicht 0 wie in der üblichen Cohomologietheorie. Das liegt an folgendem (vgl. (4)): In der üblichen Theorie ist $H^0(X, pt)$ für zusammenhängendes X gleich 0, während $K^0(X, pt)$ im allgemeinen von 0 verschieden ist.

2.4. Zu dem Funktor K^0 gibt es einen universellen Raum Γ. Man betrachte die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $\mathbf{U}(2n)/(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(n))$ der n-dimensionalen Teilräume durch den Ursprung des $\mathbf{C}^{2n}$. Man kann „zum Limes übergehen" und erhält einen Raum

$$B_{\mathbf{U}} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{U}(2n)/(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(n)) .$$

Der Raum Γ ist das cartesische Produkt von $\mathbf{Z}$ (ganze Zahlen in diskreter Topologie) mit $B_{\mathbf{U}}$. Man wählt für Γ einen Basispunkt in $\{0\} \times B_{\mathbf{U}}$. Aus der Theorie der klassifizierenden Räume folgt, dass $K^0(X, pt)$ in eineindeutiger Korrespondenz steht zu $\pi(X, \Gamma)$, der Menge der Homotopieklassen (bezüglich der gewählten Basispunkte) von stetigen Abbildungen $X \to \Gamma$. Per definitionem ist für $n > 0$

$$K^{-n}(X, pt) = K^0(S^n(X), pt) .$$

Also steht $K^{-n}(X, pt)$ in eineindeutiger Korrespondenz zu $\pi(S^n(X), \Gamma)$ oder, was auf das gleiche hinauskommt, zu $\pi(X, \Omega^n \Gamma)$, der Menge der Homotopieklassen (bezüglich der Basispunkte) von X in den n-fachen Schleifenraum von Γ.

Bisher war es uns nicht gelungen, die Funktoren K^n für $n > 0$ zu definieren. Nun kommt uns die Bottsche Theorie [8, 9] zur

Hilfe. Bott hat eine Homotopie-Äquivalenz zwischen Γ und $\Omega^2 \Gamma$ angegeben. Also gibt es die entsprechende Bijektion

$$K^{-n}(X, Y) \cong K^{-(n+2)}(X, Y), \quad n > 0. \tag{5}$$

Man kann zeigen, dass (5) die Gruppenstruktur respektiert. Also sind die Funktoren K^{-n} und $K^{-(n+2)}$ einander „gleich". Verlangt man (5) für alle ganzen Zahlen n, dann sind alle Funktoren K^n definiert. Die Funktoren K^n erfüllen alle Axiome (vgl. [4, 15] und auch den Vortrag von Eckmann auf diesem Symposium) bis auf das Dimensionsaxiom. Es ist ($n \geqq 0$)

$$K^{-n}(pt) = K^{-n}(pt^+, pt) =$$

$$K^0(S^n(pt^+), pt) = K^0(S^n, pt) = \pi_n(\Gamma).$$

Nach Bott (vgl. (5)) ist $\pi_n(\Gamma) = \mathbf{Z}$ für gerades n und gleich 0 für ungerades n. Also gilt (für alle n)

$$K^n(pt) \cong \mathbf{Z} \text{ für } n \text{ gerade}, \quad K^n(pt) = 0 \text{ für } n \text{ ungerade}. \tag{6}$$

2.5. Da $K^n = K^{n+2}$, genügt es, die Funktoren K^0 und K^1 zu betrachten. Wir setzen

$$K^* = K^0 + K^1. \tag{7}$$

Für einen Raum X ist $K^0(X)$ ein kommutativer Ring. Die Multiplikation wird durch das Tensorprodukt von komplexen Vektorraum-Bündeln induziert. $K^*(X)$ ist über $\mathbf{Z}_2$ graduiert. (Man betrachte die Indices 0 und 1 in (7) als die Elemente von $\mathbf{Z}_2$.) Man kann die Ringstruktur von $K^0(X)$ so erweitern [4], dass $K^*(X)$ zu einem $\mathbf{Z}_2$-graduierten antikommutativen Ring wird. Für $a \in K^i(X)$ und $b \in K^j(X)$ ist $ab \in K^{i+j}(X)$, und es gilt

$$ab = (-1)^{ij} ba, \quad (i, j \in \mathbf{Z}_2).$$

§ 3. Der Chernsche Charakter.

3.1. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ Unbestimmte und $a_1, \ldots, a_k$ die elementarsymmetrischen Polynome in den $x_1, \ldots, x_k$. Es sei ferner s_j das Polynom in den $a_1, a_2, \ldots$, welches die Potenzsumme $x_1^j + \ldots + x_k^j$ ($k \geqq j$) durch die $a_1, a_2, \ldots$ ausdrückt. Man hat so

(das k und die x_i kann man vergessen), eine wohlbestimmte Folge $s_1, s_2, \ldots$ von Polynomen in den Unbestimmten $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzzahligen Koeffizienten

$$s_1 = a_1 , \quad s_2 = -2a_2 + a_1^2 , \ldots ,$$

(1) $$s_n = (-1)^{n-1} n a_n + \text{ zusammengesetzte Monome.}$$

3.2. Gegeben sei ein komplexes Vektorraum-Bündel ξ über X. (Wir machen die Voraussetzungen von 2.1.) Ordnet man jeder Zusammenhangskomponente von X die Dimension der Fasern von ξ über den Punkten dieser Zusammenhangskomponente zu, dann erhält man ein Element von $H^0(X; \mathbf{Z})$, das wir den Rang des Vektorraum-Bündels nennen ($rg(\xi)$). rg liefert einen Ring-Homomorphismus

(2) $$rg\colon K^0(X) \to H^0(X; \mathbf{Z}) .$$

Nun seien $c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$ die Chernschen Klassen von ξ. Dann können wir die Elemente

$$s_i(\xi) = s_i(c_1(\xi), \ldots, c_i(\xi)) \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$$

betrachten ($i = 1, 2, \ldots$). Wir führen nun rationale Koeffizienten ein, d.h. wir betrachten das Tensorprodukt

$$H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q} = H^*(X; \mathbf{Q}) .$$

Der Chernsche Charakter von ξ is so definiert:

(3) $$ch(\xi) = rg(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(\xi)}{j!} \in H^*(X; \mathbf{Q}) .$$

Der Chernsche Charakter ist offensichtlich der Exponentialfunktion nachgebildet. Fundamentale Eigenschaften der Chernschen Klassen implizieren [6, 12], dass

(4) $$ch(\xi' \oplus \xi'') = ch(\xi') + ch(\xi'') ,$$
$$ch(\xi' \otimes \xi'') = ch(\xi')\, ch(\xi'') ,$$

wobei es sich hier um die Whitneysche Summe, bzw. um das Tensorprodukt von Vektorraum-Bündeln handelt. Wegen (4)

liefert ch einen Ring-Homomorphismus

$$ch\colon K^0(X) \to H^*(X;\mathbf{Q}) . \tag{5}$$

Offensichtlich ist auch $s_i(\xi)$ für $\xi \in K^0(X)$ wohldefiniert.

3.3. Der Ring $H^*(X;\mathbf{Q})$ ist ebenfalls über $\mathbf{Z}_2$-graduiert: $H^{ev}(X;\mathbf{Q})$ sei die direkte Summe der gerade-dimensionalen Cohomologiegruppen und $H^{od}(X;\mathbf{Q})$ die der ungerade-dimensionalen („Even" bzw. „Odd"). Dann ist

$$H^* = H^{ev} + H^{od} ,$$

wo H^{ev} die Rolle von K^0 und H^{od} die von K^1 in 2.5 übernommen hat. ch ist ein Ring-Homomorphismus von $K^0(X)$ in $H^{ev}(X;\mathbf{Q})$. Man kann ch zu einem Ring-Homomorphismus von $K^*(X)$ in $H^*(X;\mathbf{Q})$ erweitern, indem man verlangt, dass ch mit den Einhängungs-Isomorphismen verträglich ist. ch wird so zu einer natürlichen Transformation von K^* in H^* (rationale Koeffizienten), welche die $\mathbf{Z}_2$-Graduierung und die multiplikative Struktur respektiert (vgl. [4] für Einzelheiten).

3.4. Es gibt eine Spektralsequenz [4], welche die in § 2 konstruierte Cohomologie-Theorie mit der üblichen (ganzzahligen) Cohomologie-Theorie in Verbindung setzt. Für endliche CW-Komplexe X, deren ganzzahlige Cohomologie keine Torsion hat, bricht die Spektralsequenz zusammen, und es ergibt sich folgender Satz.

Satz. — *Es sei X ein endlicher CW-Komplex, dessen ganzzahlige Cohomologie keine Torsion habe. Dann ist*

$$ch\colon K^*(X) \to H^*(X;\mathbf{Q})$$

injektiv. $H^*(X;\mathbf{Z})$ und $K^*(X) \cong ch\, K^*(X)$ sind Unterringe von $H^*(X;\mathbf{Q})$. Diese beiden Unterringe stehen in folgender Beziehung:

a) Ist $a \in ch\, K^*(X)$, dann gehört die erste nicht verschwindende Komponente der rationalen Cohomologieklasse a zu $H^*(X;\mathbf{Z})$;

b) Zu jedem $x \in H^n(X; \mathbf{Z})$, n beliebig, gibt es ein Element $a \in ch\, K^*(X)$, dessen erste nicht verschwindende Komponente gleich x ist.

Eine Folgerung aus dem vorstehenden Satz ist, dass $K^*(X)$ und $H^*(X; \mathbf{Z})$ für torsionsfreies X (unter Erhaltung der $\mathbf{Z}_2$-Graduierungen) *additiv*-isomorph sind. Beide sind also freie abelsche Gruppen vom Range b, wo b die Summe der Bettischen Zahlen von X ist.

3.5. Aus dem vorstehenden Satz erhält man für $X = \mathbf{S}^{2n}$ folgenden Satz von Bott, der bei einem systematischen Aufbau der Theorie als direkte Folge der Bottschen Periodizität natürlich viel früher auftritt.

SATZ. — *Ist ξ ein komplexes Vektorraum-Bündel über $\mathbf{S}^{2n}$, dann ist die Chernsche Klasse $c_n(\xi) \in H^{2n}(\mathbf{S}^{2n}; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ durch $(n-1)!$ teilbar.*

Wegen $H^0(X; \mathbf{Z}) \subset ch\, K^0(X)$ und da $H^i(\mathbf{S}^{2n}; \mathbf{Q})$ für $0 < i < 2n$ verschwindet, ist nämlich $s_n(\xi)/n!$ nach 3.4 *a)* eine ganzzahlige Klasse. Also ist $c_n(\xi)$ wegen 3.1 (1) durch $(n-1)!$ teilbar.

Aus dem Bottschen Satz kann man schliessen, dass $\mathbf{S}^m$ für $m \neq 1, 3, 7$ nicht parallelisierbar ist (1.4).

3.6. Es sei X nun eine *kompakte orientierte Mannigfaltigkeit.* Wir setzen sie nicht als differenzierbar voraus, nehmen aber im folgenden immer an, dass die auftretenden Mannigfaltigkeiten endliche CW-Komplexe sind, damit wir im Rahmen der von uns gewählten Kategorie von Räumen bleiben. *Wir setzen ferner in diesem Abschnitt* 3.6 *voraus, dass die ganzzahlige Cohomologie von X keine Torsion habe.* Dann können wir nämlich den Satz 3.4 anwenden.

Wir betrachten den rationalen Vektorraum $H^*(X; \mathbf{Q})$ und auf ihm die folgende rationale Bilinearform B: Für $x, y \in H^*(X; \mathbf{Q})$ ist $B(x, y)$ der Wert von xy auf dem orientierten Grundzyklus von X. (Dabei nehmen die Komponenten von xy, deren Dimension nicht gleich der von X ist, den Wert 0 an). Wir können die Bilinearform B auf die beiden „Gitter" $H^*(X; \mathbf{Z})$ und $ch\, K^*(X)$

beschränken. Die Beschränkungen bezeichnen wir mit B_H bzw. B_K. Es ist sinnvoll, von der Determinante von B_H bzw. B_K zu sprechen.

LEMMA. — *Es ist* $\det B_H = \det B_K = \pm 1$.

Aus dem Poincaréschen Dualitätssatz folgt, dass $\det B_H = \pm 1$. Wählt man in $H^*(X; \mathbf{Z})$ eine Basis $x_1, \ldots, x_b$ derart, dass $x_1, \ldots, x_{b_1}$ eine Basis von $H^1(X; \mathbf{Z})$ ist, $x_{b_1+1}, \ldots, x_{b_1+b_2}$ eine Basis von $H^2(X; \mathbf{Z})$ ist usw. ($b_i = i$-te Bettische Zahl, $b = b_1 + \ldots + b_n$; $\dim X = n$), dann wird B_H durch eine Matrix folgender Gestalt gegeben

$$\begin{pmatrix} O & & M_1 \\ & M_2 & \\ & \iddots & \\ M_n & & O \end{pmatrix} , \tag{6}$$

wo M_i eine quadratische ganzzahlige Matrix der Zeilenzahl $b_i = b_{n-i}$ ist. Nach 3.4 *b)* gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_b \in ch\, K^*(X)$, deren erste nicht verschwindende Komponenten gleich $x_1, \ldots, x_b$ sind. Die a_i bilden wegen 3.4 *a)* eine Basis des Gitters $ch\, K^*(X)$ und B_K wird durch eine Matrix folgender Gestalt gegeben

$$\begin{pmatrix} * & & M_1 \\ & M_2 & \\ & \iddots & \\ M_n & & O \end{pmatrix} , \tag{7}$$

wo * irgendwelche rationale (i.a. nicht ganze) Zahlen andeutet. Die Gleichheit von $\det B_H$ und $\det B_K$ folgt aus (6) und (7).

3.7. Wie in 3.6 nehmen wir an, dass X eine *kompakte, orientierte, torsionsfreie Mannigfaltigkeit* ist. Ein Element $m \in H^*(X; \mathbf{Q})$ heisst Multiplikator, wenn $B(a, m)$ für jedes $a \in ch\, K^*(X)$ ganzzahlig ist. Ein Multiplikator m heisst normiert, wenn seine 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist und seine ungeradedimensionalen Komponenten verschwinden ($m \in H^{ev}(X; \mathbf{Q})$). Ein normierter Multiplikator ist ein invertierbares Element des Ringes $H^{ev}(X; \mathbf{Q})$.

LEMMA. — *Es gibt einen normierten Multiplikator* m_0.

Es sei $a_1, \ldots, a_b$ wie in 3.6 eine Basis von $ch\, K^*(X)$, wobei $a_b = x_b$ das zur Orientierung gehörige erzeugende Element von $H^n(X; \mathbf{Z})$ sei ($n = \dim X$). Die a_i können so gewählt werden, dass (in den Bezeichnungen von 3.6) $a_i \in ch\, K^0(X)$, wenn $\dim x_i$ gerade, und $a_i \in ch\, K^1(X)$, wenn $\dim x_i$ ungerade. Die a_i bilden eine $\mathbf{Q}$-Basis von $H^*(X; \mathbf{Q})$. Wegen der Poincaréschen Dualität gibt es ein $m_0 \in H^*(X; \mathbf{Q})$, so dass $B(a_i, m_0)$ gleich vorgegebenen Werten ist. Wir verlangen $B(a_b, m_0) = 1$, ferner $B(a_i, m_0)$ ganzzahlig ($i = 1, \ldots, b$) und $B(a_i, m_0) = 0$, wenn $\dim X - \dim x_i$ ungerade.

Dann ist m_0 in der Tat ein normierter Multiplikator.

Wir wählen nun einen normierten Multiplikator m_0 und definieren mit seiner Hilfe die Bilinearform B_{K,m_0} auf dem Gitter $ch\, K^*(X)$. Wir setzen

$$B_{K,m_0}(x, y) = B(x, y m_0), \qquad x, y \in ch\, K^*(X).$$

Diese Bilinearform nimmt (im Gegensatz zu B_K) *ganzzahlige* Werte an. Ihre Determinante ist gleich $\det B_k = \pm 1$, denn B_{K,m_0} lässt sich durch eine Matrix geben, die wieder von der Form (7) ist. Es folgt sofort der Satz

SATZ. — *Es sei* $m_0 \in H^*(X; \mathbf{Q})$ *ein normierter Multiplikator der kompakten orientierten torsionsfreien Mannigfaltigkeit* X. *Ein Element* $z \in H^*(X; \mathbf{Q})$ *gehört dann und nur dann zu* $ch\, K^*(X)$, *wenn* $B(x, z m_0)$ *für alle* $x \in ch\, K^*(X)$ *ganzzahlig ist. Ein Element* $m \in H^*(X; \mathbf{Q})$ *ist dann und nur dann Multiplikator, wenn* $m/m_0 \in ch\, K^*(X)$.

3.8. Gegeben sei ein endlicher CW-Komplex X. Es sei $G^*(X)$ die Menge der Elemente von $H^*(X; \mathbf{Q})$, deren 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist und deren ungerade-dimensionale Komponenten verschwinden. $G^*(X)$ ist eine multiplikative Untergruppe von $H^*(X; \mathbf{Q})$. Der Durchschnitt $G^*(X) \cap ch\, K^*(X) = G^*(X) \cap ch\, K^0(X)$ ist eine Untergruppe von $G^*(X)$. Ist X eine kompakte orientierte torsionsfreie Mannigfaltigkeit, dann definieren die normierten Multiplikatoren von X (nach Satz 3.7)

ein wohlbestimmtes Element

$$\mu(X) \in G^*(X)/(G^*(X) \cap ch\, K^*(X)) ,$$

das per definitionem eine „Homotopie-Invariante" von X ist und auch unabhängig von der Orientierung ist. Das Verhalten der Multiplikatoren bei Abbildungen soll nun betrachtet werden.

3.9. Es seien X und Y kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten und $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Der (additive) Gysin-Homomorphismus $f_*\colon H^*(Y; \mathbf{Q}) \to H^*(X; \mathbf{Q})$ ist definiert, indem man von einer Cohomologieklasse von Y via Poincaré-Dualität zur entsprechenden Homologieklasse übergeht, diese durch f in X abbildet und zur entsprechenden Cohomologieklasse von X übergeht. f_* und der Ring-Homomorphismus $f^*\colon H^*(X; \mathbf{Q}) \to H^*(Y; \mathbf{Q})$ stehen in der Beziehung

(8) $f_*(f^* x \cdot y) = x \cdot f_*(y)$ für $x \in H^*(X; \mathbf{Q})$ und $y \in H^*(Y; \mathbf{Q})$.

Unter Verwendung der Bezeichnungen von 3.7 gilt

Lemma. — *Gegeben sei $f\colon Y \to X$. Ist m ein Multiplikator von Y, dann ist $f_* m$ ein Multiplikator von X.*

Nach (8) ist nämlich der Wert von $x \cdot f_*(m)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X gleich dem Wert von $f^* x \cdot m$ auf dem orientierten Grundzyklus von Y. Ist $x \in ch\, K^*(X)$, dann ist $f^* x \in ch\, K^*(Y)$, also nimmt $f^* x \cdot m$ und damit auch $x \cdot f_*(m)$ auf dem jeweiligen Grundzyklus einen ganzzahligen Wert an.

Satz. — *Gegeben seien kompakte orientierte torsionsfreie Mannigfaltigkeiten X, Y. Es sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Es sei $\mathcal{T}(Y)$ bzw. $\mathcal{T}(X)$ ein festgewählter normierter Multiplikator von Y bzw. X. Ist $\eta \in K^*(Y)$, dann gibt es ein Element $f_! \eta \in K^*(X)$, so dass*

(9) $$f_*(ch(\eta) \cdot \mathcal{T}(Y)) = ch(f_! \eta) \cdot \mathcal{T}(X) .$$

Der Beweis folgt sofort aus dem vorstehenden Lemma und aus Satz 3.7. Da $ch\colon K^*(X) \to H^*(X; \mathbf{Q})$ injektiv ist (Satz 3.4) ist $f_! \eta$ durch (9) eindeutig bestimmt.

3.10. In diesem Paragraph haben wir an vielen Stellen vorausgesetzt, dass die auftretenden Mannigfaltigkeiten (d. h. ihre

ganzzahligen Cohomologieringe) keine Torsion haben. Das geschah um die Darstellung zu vereinfachen. Die Begriffe „Multiplikator" und „normierter Multiplikator" lassen sich auch für beliebige kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten einführen. Natürlich bleibt Lemma 3.9 richtig. Für die Lemmata 3.6 und 3.7 sowie für die Sätze 3.7 und 3.9 wurde die Torsionsfreiheit wesentlich benutzt. Jedoch ist uns kein Beispiel bekannt, dass diese Lemmata und Sätze für Mannigfaltigkeiten mit Torsion falsch werden. Für differenzierbare Mannigfaltigkeiten siehe den nächsten Paragraphen.

§ 4. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Pontrjaginsche Klassen.

4.1. Es sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir setzen voraus, dass die zweite Stiefel-Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ als Reduktion einer ganzzahligen Klasse $c_1 \in H^2(X; \mathbf{Z})$ auftritt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn X keine Torsion hat. Wir nennen X eine c_1-Mannigfaltigkeit, wenn ein Element $c_1(X) \in H^2(X; \mathbf{Z})$, dessen Reduktion mod 2 gleich $w_2(X)$ ist, fest gewählt ist. Es seien $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$ die Pontrjaginschen Klassen von X. Man definiert dann die totale Toddsche Klasse $\mathcal{T}(X) \in H^*(X; \mathbf{Q})$ der c_1-Mannigfaltigkeit X durch folgende Gleichung

$$\mathcal{T}(X) = e^{c_1(X)/2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \dots, p_j), \tag{1}$$

wo $\{\hat{A}_j\}$ die zur Potenzreihe $\dfrac{\sqrt{z}/2}{\sinh(\sqrt{z}/2)}$ gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist

$$\hat{A}_0 = 1, \quad \hat{A}_1 = -\frac{p_1}{24}, \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{2^7.45}(-4p_2 + 7p_1^2), \dots$$

Es gilt [3, 4, 6]:

Satz. — *Gegeben sei eine c_1-Mannigfaltigkeit X. Für jedes $\xi \in K^*(X)$ ist der Wert von $ch(\xi) \cdot \mathcal{T}(X)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X eine ganze Zahl.*

(Dieser Satz wird in [6, Part III] nur für geradedimensionale Mannigfaltigkeiten bewiesen, wo man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass $\xi \in K^0(X)$.)

Ist X eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit, dann wählt man für $c_1(X)$ die erste Chernsche Klasse. Der vorstehende Satz wird durch den Satz von Riemann-Roch [12] motiviert, der für ein holomorphes Vektorraum-Bündel ξ über X besagt, dass der Wert von $ch(\xi) \cdot \mathscr{T}(X)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von X mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von holomorphen Schnitten von ξ ist.

Der obige Satz geht in den Satz von Bott (3.5) über, wenn X eine gerade-dimensionale Sphäre ist, da man $c_1(X) = 0$ wählen kann und da dann $\mathscr{T}(X) = 1$. Der allgemeine Fall wird auf den Bottschen Satz zurückgeführt, indem man X in eine Sphäre $\mathbf{S}^{2n}$ einbettet und unter Verwendung gewisser Darstellungen aus ξ und dem Normalbündel von X ein Element $\xi' \in K^0(\mathbf{S}^{2n})$ konstruiert, auf das man den Bottschen Satz anwendet [3].

4.2. Es seien X, Y kompakte orientierte torsionsfreie differenzierbare c_1-Mannigfaltigkeiten. Wir haben in 4.1 gesehen, dass die totale Toddsche Klasse $\mathscr{T}(X)$ bzw. $\mathscr{T}(Y)$ ein normierter Multiplikator von X bzw. Y ist. Also gilt Satz 3.9 mit diesen Klassen. Das ist das differenzierbare Analogon der Grothendieckschen Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes [7]. Dieses Analogon kann ohne Voraussetzung der Torsionsfreiheit bewiesen werden [3, 4].

4.3. Es seien X und X' kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten vom gleichen Homotopietyp. (Man nehme an, dass eine Homotopie-Äquivalenz von X und X' gegeben ist.) Es sei $p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i$ bzw. $p' = \sum_{i=0}^{\infty} p_i'$ die totale Pontrjaginsche Klasse von X bzw. X'. Wegen der gegebenen Homotopie-Äquivalenzen fassen wir auch p' als Element von $H^*(X; \mathbf{Z})$ auf. Setzen wir X (und X') als torsionsfrei voraus, dann können wir X und X' zu c_1-Mannigfaltigkeiten machen. Da w_2 eine Homotopie-Invariante ist, können wir annehmen, dass bei der Homotopieäquivalenz $c_1(X)$ in $c_1(X')$ übergeht. Es folgt aus 3.8, 3.9, dass

$$(2) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j) \Big/ \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1', \ldots, p_j') \in ch\, K^0(X) .$$

Wir setzen $p/p' = q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i$ mit $q_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$. Da $\{\hat{A}_j\}$ eine multiplikative Folge von Polynomen ist, kann (2) auch so geschrieben werden

$$(3) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(q_1, \ldots, q_j) \in ch\, K^0(X) .$$

Wir wollen sehen, was man daraus über die q_i schliessen kann.

4.4 Im Rahmen dieses Vortrags hatten wir (2) für torsionsfreie Mannigfaltigkeiten erhalten. Man kann jedoch (2) und damit (3) für beliebige, kompakte differenzierbare homotopie-äquivalente Mannigfaltigkeiten X und X' nachweisen [3], die auch nicht orientierbar zu sein brauchen. Also ist auch in diesem allgemeineren Fall

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(q_1, \ldots, q_j) = \mathrm{ch}(\xi) , \qquad \xi \in K^0(X) ,$$

und daher (siehe 3.2)

$$(4) \qquad (2k)!\, \hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k) = s_{2k}(\xi) ,$$

wo $s_{2k}(\xi)$ von einer ganzzahligen Klasse kommt. Nun kann man zeigen [3], dass ξ sogar als Element des Unterrings von $K^0(X)$ gewählt werden kann, der von den komplexen Vektorraum-Bündeln erzeugt wird, die komplexe Erweiterung eines reellen Vektorraum-Bündels sind. In diesem Fall kommt sogar $s_{2k}(\xi)/2$ von einer ganzzahligen Klasse und wir erhalten also die Aussage

$$(5) \qquad 2^{-1} \cdot (2k)!\, \hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k)$$

ist eine ganzzahlige Klasse (oder genauer: die angegebene rationale Klasse kommt bei dem Koeffizienten-Homomorphismus $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ von einer ganzzahligen Klasse).

4.5. Wir wollen jetzt etwas näher erläutern, was die Aussage (5) für Cohomologieklassen $q_i \in H^{4i}$ bedeutet.

Das Polynom $\hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k)$ ist von folgender Gestalt

$$\hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k) = \frac{2^{\alpha(k)-4k}}{\mu(k)} \cdot D_k(q_1, \ldots, q_k), \tag{6}$$

wo D_k ein Polynom mit ganzzahligen teilerfremden Koeffizienten ist, $\alpha(k)$ die Anzahl der Einsen in der dyadischen Entwicklung von k ist und wo

$$\mu(k) = \prod \rho^{\left[\frac{2k}{\rho-1}\right]} \tag{7}$$

(Produkt über alle ungeraden Primzahlen ρ.)

Siehe hierzu [12, § 1.6] und [5, § 3.8].

Wir setzen

$$M_k = \frac{\mu(k)}{(2k)!} \cdot 2^{-\alpha(k)+4k+1}. \tag{8}$$

Für jede rationale Zahl r schreiben wir

$$r = \pm \prod \rho^{\nu_\rho(r)},$$

wo ρ über *alle* Primzahlen läuft und der Exponent $\nu_\rho(r)$ ganzzahlig ist.

Lemma. — *Die rationale Zahl M_k ist ganzzahlig.*

Es ist

$$\nu_2(M_k) = 2k+1$$

$$\nu_\rho(M_k) = \left[\frac{\alpha_\rho(2k)}{\rho-1}\right] \quad \textit{für } \rho \textit{ ungerade},$$

wo $\alpha_\rho(n)$ die Summe der Koeffizienten in der ρ-adischen Entwicklung von n ist.

(Die Zahl $\alpha_2(n)$ wurde oben mit $\alpha(n)$ bezeichnet).

Zum Beweis erinnern wir an die bekannte Formel

$$\nu_\rho(r!) = \frac{r-\alpha_\rho(r)}{\rho-1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\nu_2(M_k) &= -\alpha(k)+4k+1-(2k-\alpha(2k)) \\ &= 2k+1,\end{aligned}$$

da $\alpha(k) = \alpha(2k)$. Ferner ist für eine ungerade Primzahl ρ

$$v_\rho(M_k) = \left[\frac{2k}{\rho-1}\right] - \frac{2k-\alpha_\rho(2k)}{\rho-1}.$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$0 \leqq \frac{2k}{\rho-1} - \left[\frac{2k}{\rho-1}\right] < 1.$$

Die Aussage (5) ist äquivalent zu

$$D_k(q_1, \ldots, q_k) \equiv 0 \pmod{M_k}, \tag{9}$$

d.h. D_k/M_k kommt von einer ganzzahligen Klasse. Für $k = 1, 2, 3$ haben wir

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv 0 \pmod{24}, \\ 4q_2 - 7q_1^2 &\equiv 0 \pmod{480}, \\ 16q_3 - 44q_2 q_1 + 31q_1^3 &\equiv 0 \pmod{2688}. \end{aligned}$$

4.6. Im nächsten Abschnitt (4.7) wollen wir zeigen, dass aus (5) oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus (9) rein formal die Kongruenz

$$q_k \equiv 0 \pmod 8, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

abgeleitet werden kann. Wir benötigen dazu das folgende zahlentheoretische Lemma.

LEMMA. — *Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Unbestimmte über dem Körper* **Q** *der rationalen Zahlen. Das Polynom*

$$2^{-1} \cdot (2k)! \cdot \hat{A}_k(8a_1, 8a_2, \ldots, 8a_k) \qquad \text{(vgl. (5))} \tag{10}$$

ist ganz bezüglich 2, d.h. alle Koeffizienten dieses Polynoms sind rationale Zahlen, die 2 nicht im Nenner enthalten.

Beweis: Der Koeffizient $\alpha_{j_1 \ldots j_r}$ von $a_{j_1} \ldots a_{j_r}$ $(j_1 + \ldots + j_r = k)$ in dem Polynom (10) ist gegeben durch

$$\alpha_{j_1 \cdots j_r} = 2^{-1} \cdot (2k)! \cdot 2^{3r} \cdot \sum(j_1, \ldots, j_r), \tag{11}$$

wo $\Sigma(j_1, \ldots, j_r)$ die symmetrische Funktion mit Hauptterm $(\beta_1')^{j_1} \ldots (\beta_r')^{j_r}$ in den β_i' bezeichnet, wobei die β_i' die formalen Wurzeln der charakteristischen Potenzreihe

$$\frac{\sqrt{z}/2}{\sinh(\sqrt{z}/2)} \qquad \text{(vgl. [12, § 1.4])}$$

sind. Wir setzen $s_i = \Sigma(i)$. Bekanntlich ist $\Sigma(j_1, \ldots, j_r)$ ein Polynom in den s_i mit *ganzzahligen* Koeffizienten dividiert durch

$$d = n_1!\, n_2! \ldots n_t!\,,$$

falls in der Folge $(j_1, \ldots, j_r)$ n_1-mal eine Zahl h_1, n_2-mal eine Zahl h_2, ..., n_t-mal eine Zahl h_t vorkommt. Die h_i sollen distinkt sein, ferner

$$\sum_{i=1}^{t} n_i = r\,.$$

In dem erwähnten Polynom für $\Sigma(j_1, \ldots, j_r)$ treten nur Monome

(12) $\quad s_{m_1} s_{m_2} \ldots s_{m_p}$ mit $m_1 + \ldots + m_p = j_1 + \ldots + j_r = k$ und $p \leqq r$

auf. Vgl. hierzu z.B. [19, S. 220] und die dort angegebene Literatur. Nun ist

(13) $$s_i = \frac{-B_i}{2 \cdot (2i)!}\,, \qquad [12, \S\ 1.6, \S\ 1.7]\,,$$

wo B_i die i-te Bernoullische Zahl ist. Es genügt zu zeigen, dass

(14) $$2^{3r-1} \cdot (2k)! \cdot s_{m_1} \ldots s_{m_p}/d$$

ganz ist bezüglich 2, sofern die Bedingung (12) erfüllt ist. Die in (14) angegebene Zahl ist aber wegen (13) gleich

$$\pm\, 2^{3r-p-1} \cdot \frac{(2k)!}{(2m_1)! \ldots (2m_p)!} \cdot B_{m_1} \ldots B_{m_p}/d\,.$$

Da der Polynomialkoeffizient ganz ist und da $\nu_2(B_i)$ nach dem von Staudtschen Satz gleich -1 ist, genügt es zu zeigen, dass

(15) $$3r - 2p - 1 \geqq \nu_2(d)\,.$$

Nun ist in der Tat (siehe 4.5)

$$\nu_2(d) = \sum_{i=1}^{t} n_i - \sum_{i=1}^{t} \alpha(n_i) \leqq \sum_{i=1}^{t} n_i - 1 = r - 1,$$

womit (15) wegen $p \leqq r$ (siehe (12)) bewiesen ist.

4.7. Gegeben sei nun für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Aussage (5). Wir wollen daraus $q_k \equiv 0 \pmod 8$ herleiten. Für $k = 1$ erhalten wir

$$q_1 \equiv 0 \pmod 8 \qquad \text{(siehe (9))}.$$

Nehmen wir an, dass

$$q_k \equiv 0 \pmod 8 \tag{16}$$

bereits für alle k mit $1 \leqq k < k_0$ bewiesen ist. Dann folgt aus Lemma 4.6, aus (5) und aus (13), dass

$$2^{-1} \cdot (2k_0)!\, s_{k_0} \cdot q_{k_0} = \frac{-B_{k_0}}{4} q_{k_0}$$

ganz bezüglich 2 ist. Da $\nu_2(B_{k_0}) = -1$, folgt (16) für $k = k_0$.

4.8. Die vorstehenden Rechnungen haben ergeben, dass $q = p/p' \equiv 1 \pmod 8$, wo $1 \in H^0$. Also ergibt sich (vgl. 4.4)

Satz. — *Man fasse die Pontrjaginschen Klassen einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Elemente des durch das Torsionsideal dividierten ganzzahligen Cohomologieringes auf. Diese Pontrjaginschen Klassen sind modulo 8 Invarianten des Homotopietyps der Mannigfaltigkeit.*

Wu Wen-Tsun hat im Jahre 1954 für die Pontrjaginschen Klassen die Homotopie-Invarianz modulo 12 nachgewiesen. (On Pontrjagin classes III, *American Math. Soc. Translations*, Series 2, Vol. 11, S. 155-172 (1959).) Die Invarianz mod 3 ist eine Folgerung aus der Theorie der Steenrodschen reduzierten Potenzen. Die Invarianz modulo 4 folgt aus der Tatsache, dass die Pontrjaginschen Klassen modulo 4 aus den (bekanntlich homotopie-invarianten) Stiefel-Whitneyschen Klassen mit Hilfe der Pontrjaginschen Quadrate berechnet werden können. Bezüglich der Primzahl 2 haben wir also das Resultat von Wu

verbessert: Die Pontrjaginschen Klassen (im Sinne des obigen Satzes) sind Homotopie-Invarianten mod 24. (Die Invarianz modulo 12 gilt übrigens für die ganzzahligen Pontrjaginschen Klassen. Man braucht sie nicht modulo des Torsionsideals zu reduzieren.) Es ist anzunehmen, dass die Invarianz modulo 3 ebenfalls rein formal aus (5) hergeleitet werden kann. Diese formale Herleitung würde uns gelingen, wenn wir analog zum Lemma 4.6 nachweisen könnten, dass das Polynom

$$(2k)! \cdot \hat{A}_k(3a_1, \ldots, 3a_k)$$

ganz bezüglich der Primzahl 3 ist.

Natürlich liefert unsere Methode viel stärkere Invarianzaussagen als den vorstehenden Satz. Aber sie lassen sich nicht so leicht formulieren (vgl. (9)).

Zum Beispiel ergibt (9), dass für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X, für die $H^4(X; \mathbf{Q}) = 0$, die Pontrjaginsche Klasse der Dimension 8 (modulo Torsion) eine Homotopie-Invariante mod 120 ist.

Es sei noch erwähnt, dass die Methoden von [3] auch folgenden Satz ergeben.

SATZ. — *Es sei ξ ein reelles Vektorraum-Bündel über dem endlichen CW-Komplex X. Man nehme an, dass der stabile Faser-Homotopie-Typ von ξ gleich dem des trivialen reellen Vektorraum-Bündels ist. Die $4i$-dimensionale ganzzahlige Pontrjaginsche Klasse von ξ möge mit q_i bezeichnet werden. Dann ist*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(q_1, \ldots, q_j) = ch(\eta) ,$$

wo η ein Element des von den reellen Vektorraum-Bündeln bestimmten Unterringes von $K^0(X)$ ist (4.4). Insbesondere genügen die q_i den Relationen (9).

Vgl. hierzu M. F. Atiyah, Thom complexes (*Proc. London Math. Soc.*, (3), *11*, 291-310 (1961)).

Wendet man den vorstehenden Satz auf die reellen Vektorraum-Bündel über der Sphäre $\mathbf{S}^{4k}$ an, dann erhält man ein Resultat von J. Milnor und M. Kervaire über die stabile Homo-

topiegruppe $\pi_{n+4k-1}(\mathbf{S}^n)$ (*Proc. Intern. Congress of Math.*, Edinburgh, 1958, pp. 454-458).

§ 5. Einbettungsfragen.

5.1. Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$. Das A-Geschlecht $A(M^{4k})$ ist definiert als der Wert von $2^{4k}\hat{A}_k(p_1, \ldots, p_k) = A_k(p_1, \ldots, p_k)$ auf dem orientierten Grundzyklus von M^{4k}. Dabei sind $p_1, p_2, \ldots$ die Pontrjaginschen Klassen von M^{4k}, $(p_i \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z}))$. In [6, Part II] wurde gezeigt, dass $A(M^{4k})$ eine ganze Zahl ist. In [5] wurde folgender Satz bewiesen.

Satz. — *Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn M^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $8k - 2q$ differenzierbar einbettbar ist, dann ist $A(M^{4k})$ durch 2^{q+1} teilbar. Wenn ausserdem noch $q \equiv 2 \bmod 4$ ist, dann ist $A(M^{4k})$ durch 2^{q+2} teilbar.*

Der Beweis verläuft, indem man annimmt, dass X in der Sphäre der Dimension $8k - 2q$ eingebettet ist. Mit Hilfe geeigneter Darstellungen der orthogonalen Gruppe konstruiert man aus dem Normalbündel von X ein Element von $K^0(\mathbf{S}^{8k-2q})$, auf das man den Bottschen Satz anwendet (3.5).

5.2. Wie in 5.1 sei M^{4k} kompakt orientiert differenzierbar. Wir nehmen einmal an, dass M^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+4$ differenzierbar eingebettet werden kann. Dann können wir Satz 5.1 mit $q = 2k - 2$ anwenden und erhalten, dass $A(M^{4k})$ durch 2^{2k-1} und für gerades k sogar durch 2^{2k} teilbar ist.

5.3. Die Mannigfaltigkeit M^{4k} (siehe 5.2) sei in der Sphäre $\mathbf{S}^{4k+4}$ eingebettet. Die Pontrjaginschen Klassen des Normalbündels sollen mit $\overline{p_i} \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z})$ bezeichnet werden. Da das Normalbündel die Faser $\mathbf{R}^4$ hat, verschwindet $\overline{p_i}$ für $i > 2$. Ferner ist $\overline{p_2}$ das Quadrat der *Eulerschen Klasse des Normalbündels*, welche bei jeder Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine Sphäre verschwindet. Also ist $\overline{p_i} = 0$ für $i \geqq 2$. Nun ist

$\{A_k\}$ die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe

$$(2\sqrt{z})/\sinh(2\sqrt{z}) .$$

Es sei $\{B_k\}$ die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe

$$\sinh(2\sqrt{z})/(2\sqrt{z}) .$$

Dann ist

$$A_k(p_1, \ldots, p_k) = B_k(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}) ,$$

falls $p \cdot \bar{p} = 1$, $\quad (p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i , \quad \bar{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{p_i})$.

In unserer besonderen Situation ist $\overline{p_i} = 0$ für $i \geqq 2$. Deshalb ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j(p_1, \ldots, p_j) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\overline{p_1}, 0, \ldots, 0) = \frac{\sinh 2\sqrt{\overline{p_1}}}{2\sqrt{\overline{p_1}}}$$

und damit

$$A_k(p_1, \ldots, p_k) = \frac{2^{2k}(\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} .$$

Also ist nach 5.2 die Klasse

$$\frac{2 \cdot (\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} \in H^{4k}(M^{4k}; \mathbf{Q}) \text{ ganzzahlig} . \tag{1}$$

Für gerades k ist sogar

$$\frac{(\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} \in H^{4k}(M^{4k}; \mathbf{Q}) \text{ ganzzahlig} . \tag{2}$$

5.4. Der Index $\tau(M^{4k})$ einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist die Anzahl der positiven minus die Anzahl der negativen Eigenwerte der quadratischen Form $B(x, x)$ (für $x \in H^{2k}(M^{4k}; \mathbf{R})$), wo $B(x, x)$ der Wert von $x \cdot x$ auf dem orientierten Grundzyklus von M^{4k} ist. Es gilt [12]

$$\tau(M^{4k}) = L_k(p_1, \ldots, p_k)[M^{4k}] , \tag{3}$$

wo $\{L_k(p_1, \ldots, p_k)\}$ die zur charakteristischen Potenzreihe $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{z}}$ gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist. Macht man wieder die Annahme, dass M^{4k} in der Sphäre der Dimension $4k+4$ eingebettet ist, dann folgt ähnlich wie in 5.3, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} L_j(p_1, \ldots, p_j) = \frac{\operatorname{tgh}\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_1}}$$

und damit

$$L_k(p_1, \ldots, p_k) = \pm t_k \cdot \frac{\overline{p_1}^k}{(2k+1)!}, \tag{4}$$

wo t_k die $(2k+1)$-te Ableitung von $\operatorname{tg}(x)$ für $x = 0$ ist. Bekanntlich ist t_k eine gerade ganze Zahl ($k \geqq 1$). Aus (1)-(4) folgt

5.5. Satz. — *Die kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^{4k} möge sich differenzierbar in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+4$ einbetten lassen ($k \geqq 1$). Dann ist der Index $\tau(M^{4k})$ durch $\frac{t_k}{2}$ teilbar, wo t_k die $(2k+1)$-Ableitung von $\operatorname{tg}(x)$ für $x = 0$ ist. Ist ausserdem k gerade, dann ist $\tau(M^{4k})$ sogar durch t_k teilbar.*

Für die ganzen Zahlen t_k hat man folgende Formel

$$t_{k-1} = \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{2k},$$

wo B_k die k-te Bernoullische Zahl ist. Es gilt

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 16, \quad t_3 = 2^4 \cdot 17, \quad t_4 = 2^8 \cdot 31.$$

Für $k = 1$ ist der vorstehende Satz trivial (Jede M^4 kann in den $\mathbf{R}^8$ eingebettet werden.) Für $k = 2$ besagt er, dass eine M^8, die in den Euklidischen Raum der Dimension 12 einbettbar ist, einen durch 16 teilbaren Index hat.

5.6. Satz. — *Es gibt eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit V^{4k}, die sich differenzierbar in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+3$ einbetten lässt, und deren*

Index gleich $\pm t_k$ *ist* ($t_k = (2k+1)$-*Ableitung von* $\operatorname{tg}(x)$ *für* $x = 0$).

Zum Beweis benötigen wir zunächst ein Lemma, das bereits bei Kervaire (Courbure intégrale généralisée et homotopie, *Math. Ann.*, *131*, 219-252 (1956), siehe S. 247) vorkommt.

LEMMA. — *Das cartesische Produkt* $\mathbf{S}^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{S}^{n_r}$ *von Sphären kann in den Euklidischen Raum der Dimension* $n_1+\ldots+n_r+1$ *differenzierbar eingebettet werden.*

Das Lemma ist richtig für $r = 1$. Wir beweisen es durch Induktion über r. Offensichtlich kann $\mathbf{S}^{n_r}$ mit trivialem Normalbündel in den euklidischen Raum der Dimension $n_1+\ldots+n_r+1$ eingebettet werden. Die Faser des Normalbündels ist ein $\mathbf{R}^d$ mit $d = n_1+\ldots+n_{r-1}+1$. Nach Induktionsannahme ist $\mathbf{S}^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{S}^{n_{r-1}}$ differenzierbar in $\mathbf{R}^d$ einbettbar. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

In [12, § 9.4] wird erwähnt, dass es in $\mathbf{S}^2 \times \ldots \times \mathbf{S}^2$ ($2k+1$ Faktoren) eine Untermannigfaltigkeit V^{4k} der Codimension 2 gibt, die mit jedem Faktor $\mathbf{S}^2$ die Schnittzahl 1 hat.

Nach dem Lemma ist V^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+3$ differenzierbar einbettbar. Nach [12, § 9.4] ist der Index von V^{4k} in der Tat gleich der $(2k+1)$-ten Ableitung von $\operatorname{tgh} x$ für $x = 0$, q.e.d.

Der vorstehende Satz zeigt, dass Satz 5.5 für gerades k scharf ist. Für $k = 3, 5, \ldots$ ist uns keine M^{4k} bekannt, die in $\mathbf{R}^{4k+4}$ einbettbar ist und deren Index gleich $t_k/2$ ist.

LITERATUR

[1] ADAMS, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, *72* (1960), 20-104.

[2] ALEXANDROFF, P. und H. HOPF, *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[3] ATIYAH, M. F. und F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *65* (1959), 276-281.

[4] ——und F. HIRZEBRUCH, Vector bundles and homogeneous spaces. Differential Geometry. *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. 3; *Amer. Math. Soc.*, 1961.

[5] —— und F. HIRZEBRUCH, Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables. *Bull. Soc. Math. France*, *87* (1959), 383-396.

[6] Borel, A. und F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III. *Amer. J. of Math.*, *80* (1958), 458-538; *81* (1959), 315-382; *82* (1960), 491-504.

[7] —— und J.-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). *Bull. Soc. Math. France*, *86* (1958), 97-136.

[8] Bott, R., The space of loops on a Lie group. *Mich. math. J.*, *5* (1958), 35-61.

[9] —— Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité. *Bull. Soc. Math. France*, *87* (1959), 293-310.

[10] Chern, S. S., Characteristic classes of Hermitian manifolds. *Ann. of Math.*, *47* (1946), 58-121.

[11] Eilenberg, S. und N. Steenrod, Foundations of algebraic topology. *Princeton Math. Series*, vol. *15*. Princeton Univ. Press, 1952.

[12] Hirzebruch, F., *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Ergebnisse der Mathematik. Neue Folge, Heft *9*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.

[13] Milnor, J., Some consequences of a theorem of Bott. *Ann. of Math.*, *68* (1958), 444-449.

[14] Pontrjagin, L., Characteristic cycles on differentiable manifolds. *Mat. Sbornik N. S.*, *21* (*63*), 233-284 (1947).

[15] Puppe, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. *Math. Z.*, *69* (1958), 299-344.

[16] Stiefel, E., Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten. *Comm. Math. Helv.*, *8* (1936), 3-51.

[17] —— Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra. *Comm. Math. Helv.*, *13* (1940-41), 201-218.

[18] Whitney, H., Sphere spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *21* (1935), 462-468.

[19] Loewy, A., Algebraische Gruppentheorie. *Pascal's Repertorium der höheren Mathematik*, I 1, 2. Auflage. Leipzig und Berlin, 1910.

Mathematisches Institut, Bonn.
Pembroke College, Cambridge.
Mathematical Institute, Oxford.