Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHARAKTERISTISCHE KLASSEN UND ANWENDUNGEN
Autor: Atiyah, M. F. / Hirzebruch, F.
Kapitel: § 2. Eine neue Cohomologietheorie [4],
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37131

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

X als Basis definiert. Die in 1.3 erwähnte Eigenschaft der w_i, die man heute Stiefel-Whitneysche Klassen nennt, gilt unverändert.

Später hat dann Chern [10] die Chernschen Klassen $c_i \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$ für ein *komplexes* Vektorraum-Bündel über dem Raum X und Pontrjagin (siehe z.B. [14]) die Pontrjaginschen Klassen $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$ für ein *reelles* Vektorraum-Bündel über X eingeführt. Heute definiert man die Pontrjaginsche Klasse p_i eines reellen Vektorraum-Bündels ξ als das $(-1)^i$-fache der Chernschen Klasse c_{2i} der komplexen Erweiterung von ξ (siehe z.B. [12]). Man beachte, dass die c_i und p_i ganzzahlige Cohomologieklassen sind, während die w_i Klassen mit Koeffizienten in der Gruppe der Ordnung 2 sind.

1.6. In dem Vortrag von Steenrod auf diesem Symposium ist von Cohomologie-Operationen die Rede. Die Cohomologie-Operation Sq^i zum Beispiel ordnet jedem Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ ein Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ zu. Die charakteristische Klasse w_i ordnet jedem reellen Vektorraum-Bündel über X ein Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ zu. So wie eine Cohomologie-Operation eine natürliche Abbildung von der Cohomologietheorie in die Cohomologietheorie ist, so ist eine charakteristische Klasse eine natürliche Abbildung von der Theorie der Vektorraum-Bündel in die Cohomologietheorie. Diese Analogie hat eine tiefere Bedeutung. Wir wollen versuchen, das in diesem Vortrag für den Fall der *komplexen* Vektorraum-Bündel näher auseinanderzusetzen: Mit Hilfe aller komplexen Vektorraum-Bündel, die den gegebenen Raum X als Basis haben, können „Cohomologie-Gruppen" $K^n(X)$ definiert werden [4] (n beliebige ganze Zahl), die den Axiomen von Eilenberg-Steenrod [11] genügen bis auf das „Dimensionsaxiom", welches besagt, dass die Cohomologiegruppen des einpunktigen Raumes in den von 0 verschiedenen Dimensionen verschwinden. Die charakteristischen Klassen liefern natürliche Abbildungen von dieser neuen Cohomologietheorie in die übliche Cohomologietheorie.

§ 2. Eine neue Cohomologietheorie [4].

2.1. Es sei X ein endlicher Zellenkomplex (endlicher CW-Komplex). (Diese Annahme ist viel zu speziell; sie dient der

Bequemlichkeit der Darstellung.) Wir wollen abelsche Gruppen $K^n(X)$ definieren ($n \in \mathbf{Z}$), siehe 1.6. Zunächst geben wir die Definition von $K^0(X)$, das wir auch einfach $K(X)$ nennen.

$G(X)$ sei die Menge der (Isomorphieklassen von) komplexen Vektorraum-Bündeln über X, (wobei wir zulassen, dass ein Vektorraum-Bündel über den verschiedenen Zusammenhangskomponenten von X verschiedene Faser-Dimensionen hat). $F(X)$ sei die freie abelsche Gruppe, die von $G(X)$ erzeugt wird. Für Elemente $\xi', \xi'' \in G(X)$ ist die Whitneysche Summe $\xi' \oplus \xi''$, die entsteht, indem man in jedem Punkte von X die direkte Summe der Fasern von ξ' und ξ'' bildet, ein wohldefiniertes Element von $G(X)$. Die abelsche Gruppe $K(X)$ wird definiert als $F(X)$ modulo der Untergruppe, die von allen Elementen der Form $\xi' \oplus \xi'' - \xi' - \xi''$, wo $\xi', \xi'' \in G(X)$, erzeugt wird. Die Addition in $K(X)$ ist also durch die Whitneysche Summe induziert.

2.2. Wir arbeiten in der Kategorie der Paare (X, Y), wo X endlicher CW-Komplex und Y Teilkomplex von X ist. Ein Raum X kann auch als Paar $(X, \varnothing)$, wo $\varnothing$ die leere Menge ist, betrachtet werden. Ein Raum X mit ausgezeichnetem Basispunkt x_0 kann als Paar (X, x_0) angesehen werden. Zu einem Raum X gibt es den Raum X^+, der die disjunkte Vereinigung von X mit einem zusätzlichen Punkt ist, welcher in X^+ Basispunkt ist. Die n-fache Einhängung $S^n(X)$ eines Raumes X mit Basispunkt (vgl. z.B. [15]) ist wieder ein Raum mit Basispunkt. Ist in einem Raum ein Basispunkt ausgezeichnet, dann werde dieser immer mit pt bezeichnet. Ferner soll pt auch den einpunktigen Raum andeuten. Für ein Paar (X, Y) ist X/Y der Raum, der entsteht, wenn man Y auf einen Punkt zusammenzieht, der dann in X/Y die Rolle des Basispunktes übernimmt. Für die übliche Cohomologietheorie (bezüglich festgewählter Koeffizienten) hat man kanonische Isomorphismen

$$H^i(X, pt) \cong \text{Kern}\,[H^i(X) \to H^i(pt)] \tag{1}$$

$$H^i(X^+, pt) \cong H^i(X) \tag{2}$$

$$H^i(X, Y) \cong H^i(X/Y, pt) \tag{3}$$

$$H^i(X, pt) \cong H^{i+n}(S^n(X), pt)\,. \tag{4}$$

Kennt man also den kontravarianten Funktor H^j für Räume X, dann kennt man H^i $(i < j)$ für Paare (X, Y).

2.3. Der Funktor K ist kontravariant. Für eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ haben wir einen Homomorphismus $f^!\colon K(X) \to K(Y)$, der durch das Liften von Vektorraum-Bündeln gemäss f induziert wird. Die Gruppe $K(pt)$ ist unendlich-zyklisch ($G(pt)$ ist die Halbgruppe der ganzen nichtnegativen Zahlen). Der Funktor K^0 ist per definitionem gleich K. Verlangen wir (1)-(4) per definitionem für unsere K^n, dann ist also $K^n(X, Y)$ für $n \leqq 0$ definiert (vgl. [4] für Einzelheiten). Die K^n sind für $n < 0$ nicht 0 wie in der üblichen Cohomologietheorie. Das liegt an folgendem (vgl. (4)): In der üblichen Theorie ist $H^0(X, pt)$ für zusammenhängendes X gleich 0, während $K^0(X, pt)$ im allgemeinen von 0 verschieden ist.

2.4. Zu dem Funktor K^0 gibt es einen universellen Raum Γ. Man betrachte die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $\mathbf{U}(2n)/(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(n))$ der n-dimensionalen Teilräume durch den Ursprung des $\mathbf{C}^{2n}$. Man kann „zum Limes übergehen" und erhält einen Raum

$$B_{\mathbf{U}} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{U}(2n)/(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(n)) .$$

Der Raum Γ ist das cartesische Produkt von $\mathbf{Z}$ (ganze Zahlen in diskreter Topologie) mit $B_{\mathbf{U}}$. Man wählt für Γ einen Basispunkt in $\{0\} \times B_{\mathbf{U}}$. Aus der Theorie der klassifizierenden Räume folgt, dass $K^0(X, pt)$ in eineindeutiger Korrespondenz steht zu $\pi(X, \Gamma)$, der Menge der Homotopieklassen (bezüglich der gewählten Basispunkte) von stetigen Abbildungen $X \to \Gamma$. Per definitionem ist für $n > 0$

$$K^{-n}(X, pt) = K^0(S^n(X), pt) .$$

Also steht $K^{-n}(X, pt)$ in eineindeutiger Korrespondenz zu $\pi(S^n(X), \Gamma)$ oder, was auf das gleiche hinauskommt, zu $\pi(X, \Omega^n \Gamma)$, der Menge der Homotopieklassen (bezüglich der Basispunkte) von X in den n-fachen Schleifenraum von Γ.

Bisher war es uns nicht gelungen, die Funktoren K^n für $n > 0$ zu definieren. Nun kommt uns die Bottsche Theorie [8, 9] zur

Hilfe. Bott hat eine Homotopie-Äquivalenz zwischen Γ und $\Omega^2 \Gamma$ angegeben. Also gibt es die entsprechende Bijektion

$$K^{-n}(X, Y) \cong K^{-(n+2)}(X, Y), \quad n > 0. \tag{5}$$

Man kann zeigen, dass (5) die Gruppenstruktur respektiert. Also sind die Funktoren K^{-n} und $K^{-(n+2)}$ einander „gleich". Verlangt man (5) für alle ganzen Zahlen n, dann sind alle Funktoren K^n definiert. Die Funktoren K^n erfüllen alle Axiome (vgl. [4, 15] und auch den Vortrag von Eckmann auf diesem Symposium) bis auf das Dimensionsaxiom. Es ist ($n \geqq 0$)

$$K^{-n}(pt) = K^{-n}(pt^+, pt) =$$

$$K^0(S^n(pt^+), pt) = K^0(S^n, pt) = \pi_n(\Gamma).$$

Nach Bott (vgl. (5)) ist $\pi_n(\Gamma) = \mathbf{Z}$ für gerades n und gleich 0 für ungerades n. Also gilt (für alle n)

$$K^n(pt) \cong \mathbf{Z} \text{ für } n \text{ gerade}, \quad K^n(pt) = 0 \text{ für } n \text{ ungerade}. \tag{6}$$

2.5. Da $K^n = K^{n+2}$, genügt es, die Funktoren K^0 und K^1 zu betrachten. Wir setzen

$$K^* = K^0 + K^1. \tag{7}$$

Für einen Raum X ist $K^0(X)$ ein kommutativer Ring. Die Multiplikation wird durch das Tensorprodukt von komplexen Vektorraum-Bündeln induziert. $K^*(X)$ ist über $\mathbf{Z}_2$ graduiert. (Man betrachte die Indices 0 und 1 in (7) als die Elemente von $\mathbf{Z}_2$.) Man kann die Ringstruktur von $K^0(X)$ so erweitern [4], dass $K^*(X)$ zu einem $\mathbf{Z}_2$-graduierten antikommutativen Ring wird. Für $a \in K^i(X)$ und $b \in K^j(X)$ ist $ab \in K^{i+j}(X)$, und es gilt

$$ab = (-1)^{ij} ba, \quad (i, j \in \mathbf{Z}_2).$$

§ 3. Der Chernsche Charakter.

3.1. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ Unbestimmte und $a_1, \ldots, a_k$ die elementarsymmetrischen Polynome in den $x_1, \ldots, x_k$. Es sei ferner s_j das Polynom in den $a_1, a_2, \ldots$, welches die Potenzsumme $x_1^j + \ldots + x_k^j$ ($k \geqq j$) durch die $a_1, a_2, \ldots$ ausdrückt. Man hat so