Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1961)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHARAKTERISTISCHE KLASSEN UND ANWENDUNGEN

Autor: Atiyah, M. F. / Hirzebruch, F.

Kapitel: § 4. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN UND PONTRJAGINSGHE KLASSEN.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37131

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ganzzahligen Cohomologieringe) keine Torsion haben. Das geschah um die Darstellung zu vereinfachen. Die Begriffe „Multiplikator" und „normierter Multiplikator" lassen sich auch für beliebige kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten einführen. Natürlich bleibt Lemma 3.9 richtig. Für die Lemmata 3.6 und 3.7 sowie für die Sätze 3.7 und 3.9 wurde die Torsionsfreiheit wesentlich benutzt. Jedoch ist uns kein Beispiel bekannt, dass diese Lemmata und Sätze für Mannigfaltigkeiten mit Torsion falsch werden. Für differenzierbare Mannigfaltigkeiten siehe den nächsten Paragraphen.

§ 4. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Pontrjaginsche Klassen.

4.1. Es sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir setzen voraus, dass die zweite Stiefel-Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ als Reduktion einer ganzzahligen Klasse $c_1 \in H^2(X; \mathbf{Z})$ auftritt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn X keine Torsion hat. Wir nennen X eine c_1-Mannigfaltigkeit, wenn ein Element $c_1(X) \in H^2(X; \mathbf{Z})$, dessen Reduktion mod 2 gleich $w_2(X)$ ist, fest gewählt ist. Es seien $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$ die Pontrjaginschen Klassen von X. Man definiert dann die totale Toddsche Klasse $\mathcal{T}(X) \in H^*(X; \mathbf{Q})$ der c_1-Mannigfaltigkeit X durch folgende Gleichung

$$\mathcal{T}(X) = e^{c_1(X)/2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \dots, p_j), \tag{1}$$

wo $\{\hat{A}_j\}$ die zur Potenzreihe $\dfrac{\sqrt{z}/2}{\sinh(\sqrt{z}/2)}$ gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist

$$\hat{A}_0 = 1, \quad \hat{A}_1 = -\frac{p_1}{24}, \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{2^7.45}(-4p_2 + 7p_1^2), \dots$$

Es gilt [3, 4, 6]:

Satz. — *Gegeben sei eine c_1-Mannigfaltigkeit X. Für jedes $\xi \in K^*(X)$ ist der Wert von $ch(\xi) \cdot \mathcal{T}(X)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X eine ganze Zahl.*

(Dieser Satz wird in [6, Part III] nur für geradedimensionale Mannigfaltigkeiten bewiesen, wo man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass $\xi \in K^0(X)$.)

Ist X eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit, dann wählt man für $c_1(X)$ die erste Chernsche Klasse. Der vorstehende Satz wird durch den Satz von Riemann-Roch [12] motiviert, der für ein holomorphes Vektorraum-Bündel ξ über X besagt, dass der Wert von $ch(\xi) \cdot \mathscr{T}(X)$ auf dem orientierten Grundzyklus von X gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von X mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von holomorphen Schnitten von ξ ist.

Der obige Satz geht in den Satz von Bott (3.5) über, wenn X eine gerade-dimensionale Sphäre ist, da man $c_1(X) = 0$ wählen kann und da dann $\mathscr{T}(X) = 1$. Der allgemeine Fall wird auf den Bottschen Satz zurückgeführt, indem man X in eine Sphäre $\mathbf{S}^{2n}$ einbettet und unter Verwendung gewisser Darstellungen aus ξ und dem Normalbündel von X ein Element $\xi' \in K^0(\mathbf{S}^{2n})$ konstruiert, auf das man den Bottschen Satz anwendet [3].

4.2. Es seien X, Y kompakte orientierte torsionsfreie differenzierbare c_1-Mannigfaltigkeiten. Wir haben in 4.1 gesehen, dass die totale Toddsche Klasse $\mathscr{T}(X)$ bzw. $\mathscr{T}(Y)$ ein normierter Multiplikator von X bzw. Y ist. Also gilt Satz 3.9 mit diesen Klassen. Das ist das differenzierbare Analogon der Grothendieckschen Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes [7]. Dieses Analogon kann ohne Voraussetzung der Torsionsfreiheit bewiesen werden [3, 4].

4.3. Es seien X und X' kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten vom gleichen Homotopietyp. (Man nehme an, dass eine Homotopie-Äquivalenz von X und X' gegeben ist.) Es sei $p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i$ bzw. $p' = \sum_{i=0}^{\infty} p_i'$ die totale Pontrjaginsche Klasse von X bzw. X'. Wegen der gegebenen Homotopie-Äquivalenzen fassen wir auch p' als Element von $H^*(X; \mathbf{Z})$ auf. Setzen wir X (und X') als torsionsfrei voraus, dann können wir X und X' zu c_1-Mannigfaltigkeiten machen. Da w_2 eine Homotopie-Invariante ist, können wir annehmen, dass bei der Homotopieäquivalenz $c_1(X)$ in $c_1(X')$ übergeht. Es folgt aus 3.8, 3.9, dass

$$(2) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j) \Big/ \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1', \ldots, p_j') \in ch\, K^0(X) .$$

Wir setzen $p/p' = q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i$ mit $q_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$. Da $\{\hat{A}_j\}$ eine multiplikative Folge von Polynomen ist, kann (2) auch so geschrieben werden

$$(3) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(q_1, \ldots, q_j) \in ch\, K^0(X) .$$

Wir wollen sehen, was man daraus über die q_i schliessen kann.

4.4 Im Rahmen dieses Vortrags hatten wir (2) für torsionsfreie Mannigfaltigkeiten erhalten. Man kann jedoch (2) und damit (3) für beliebige, kompakte differenzierbare homotopie-äquivalente Mannigfaltigkeiten X und X' nachweisen [3], die auch nicht orientierbar zu sein brauchen. Also ist auch in diesem allgemeineren Fall

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(q_1, \ldots, q_j) = \mathrm{ch}(\xi) , \qquad \xi \in K^0(X) ,$$

und daher (siehe 3.2)

$$(4) \qquad (2k)!\, \hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k) = s_{2k}(\xi) ,$$

wo $s_{2k}(\xi)$ von einer ganzzahligen Klasse kommt. Nun kann man zeigen [3], dass ξ sogar als Element des Unterrings von $K^0(X)$ gewählt werden kann, der von den komplexen Vektorraum-Bündeln erzeugt wird, die komplexe Erweiterung eines reellen Vektorraum-Bündels sind. In diesem Fall kommt sogar $s_{2k}(\xi)/2$ von einer ganzzahligen Klasse und wir erhalten also die Aussage

$$(5) \qquad 2^{-1} \cdot (2k)!\, \hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k)$$

ist eine ganzzahlige Klasse (oder genauer: die angegebene rationale Klasse kommt bei dem Koeffizienten-Homomorphismus $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ von einer ganzzahligen Klasse).

4.5. Wir wollen jetzt etwas näher erläutern, was die Aussage (5) für Cohomologieklassen $q_i \in H^{4i}$ bedeutet.

Das Polynom $\hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k)$ ist von folgender Gestalt

$$\hat{A}_k(q_1, \ldots, q_k) = \frac{2^{\alpha(k)-4k}}{\mu(k)} \cdot D_k(q_1, \ldots, q_k), \tag{6}$$

wo D_k ein Polynom mit ganzzahligen teilerfremden Koeffizienten ist, $\alpha(k)$ die Anzahl der Einsen in der dyadischen Entwicklung von k ist und wo

$$\mu(k) = \prod \rho^{\left[\frac{2k}{\rho-1}\right]} \tag{7}$$

(Produkt über alle ungeraden Primzahlen ρ.)

Siehe hierzu [12, § 1.6] und [5, § 3.8].

Wir setzen

$$M_k = \frac{\mu(k)}{(2k)!} \cdot 2^{-\alpha(k)+4k+1}. \tag{8}$$

Für jede rationale Zahl r schreiben wir

$$r = \pm \prod \rho^{\nu_\rho(r)},$$

wo ρ über *alle* Primzahlen läuft und der Exponent $\nu_\rho(r)$ ganzzahlig ist.

Lemma. — *Die rationale Zahl M_k ist ganzzahlig.*

Es ist

$$\nu_2(M_k) = 2k+1$$

$$\nu_\rho(M_k) = \left[\frac{\alpha_\rho(2k)}{\rho-1}\right] \quad \textit{für } \rho \textit{ ungerade},$$

wo $\alpha_\rho(n)$ die Summe der Koeffizienten in der ρ-adischen Entwicklung von n ist.

(Die Zahl $\alpha_2(n)$ wurde oben mit $\alpha(n)$ bezeichnet).

Zum Beweis erinnern wir an die bekannte Formel

$$\nu_\rho(r!) = \frac{r-\alpha_\rho(r)}{\rho-1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\nu_2(M_k) &= -\alpha(k)+4k+1-(2k-\alpha(2k)) \\ &= 2k+1,\end{aligned}$$

da $\alpha(k) = \alpha(2k)$. Ferner ist für eine ungerade Primzahl ρ

$$v_\rho(M_k) = \left[\frac{2k}{\rho-1}\right] - \frac{2k-\alpha_\rho(2k)}{\rho-1}.$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$0 \leqq \frac{2k}{\rho-1} - \left[\frac{2k}{\rho-1}\right] < 1.$$

Die Aussage (5) ist äquivalent zu

$$D_k(q_1, \ldots, q_k) \equiv 0 \pmod{M_k}, \tag{9}$$

d.h. D_k/M_k kommt von einer ganzzahligen Klasse. Für $k = 1, 2, 3$ haben wir

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv 0 \pmod{24}, \\ 4q_2 - 7q_1^2 &\equiv 0 \pmod{480}, \\ 16q_3 - 44q_2 q_1 + 31q_1^3 &\equiv 0 \pmod{2688}. \end{aligned}$$

4.6. Im nächsten Abschnitt (4.7) wollen wir zeigen, dass aus (5) oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus (9) rein formal die Kongruenz

$$q_k \equiv 0 \pmod 8, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

abgeleitet werden kann. Wir benötigen dazu das folgende zahlentheoretische Lemma.

LEMMA. — *Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Unbestimmte über dem Körper* **Q** *der rationalen Zahlen. Das Polynom*

$$2^{-1} \cdot (2k)! \cdot \hat{A}_k(8a_1, 8a_2, \ldots, 8a_k) \qquad \text{(vgl. (5))} \tag{10}$$

ist ganz bezüglich 2, d.h. alle Koeffizienten dieses Polynoms sind rationale Zahlen, die 2 nicht im Nenner enthalten.

Beweis: Der Koeffizient $\alpha_{j_1 \ldots j_r}$ von $a_{j_1} \ldots a_{j_r}$ $(j_1 + \ldots + j_r = k)$ in dem Polynom (10) ist gegeben durch

$$\alpha_{j_1 \cdots j_r} = 2^{-1} \cdot (2k)! \cdot 2^{3r} \cdot \sum(j_1, \ldots, j_r), \tag{11}$$

wo $\Sigma(j_1, \ldots, j_r)$ die symmetrische Funktion mit Hauptterm $(\beta_1')^{j_1} \ldots (\beta_r')^{j_r}$ in den β_i' bezeichnet, wobei die β_i' die formalen Wurzeln der charakteristischen Potenzreihe

$$\frac{\sqrt{z}/2}{\sinh(\sqrt{z}/2)} \qquad \text{(vgl. [12, § 1.4])}$$

sind. Wir setzen $s_i = \Sigma(i)$. Bekanntlich ist $\Sigma(j_1, \ldots, j_r)$ ein Polynom in den s_i mit *ganzzahligen* Koeffizienten dividiert durch

$$d = n_1!\, n_2! \ldots n_t!\,,$$

falls in der Folge $(j_1, \ldots, j_r)$ n_1-mal eine Zahl h_1, n_2-mal eine Zahl h_2, ..., n_t-mal eine Zahl h_t vorkommt. Die h_i sollen distinkt sein, ferner

$$\sum_{i=1}^{t} n_i = r\,.$$

In dem erwähnten Polynom für $\Sigma(j_1, \ldots, j_r)$ treten nur Monome

(12) $\quad s_{m_1} s_{m_2} \ldots s_{m_p}$ mit $m_1 + \ldots + m_p = j_1 + \ldots + j_r = k$ und $p \leqq r$

auf. Vgl. hierzu z.B. [19, S. 220] und die dort angegebene Literatur. Nun ist

(13) $$s_i = \frac{-B_i}{2 \cdot (2i)!}\,, \qquad [12, \S\ 1.6, \S\ 1.7]\,,$$

wo B_i die i-te Bernoullische Zahl ist. Es genügt zu zeigen, dass

(14) $$2^{3r-1} \cdot (2k)! \cdot s_{m_1} \ldots s_{m_p}/d$$

ganz ist bezüglich 2, sofern die Bedingung (12) erfüllt ist. Die in (14) angegebene Zahl ist aber wegen (13) gleich

$$\pm\, 2^{3r-p-1} \cdot \frac{(2k)!}{(2m_1)! \ldots (2m_p)!} \cdot B_{m_1} \ldots B_{m_p}/d\,.$$

Da der Polynomialkoeffizient ganz ist und da $\nu_2(B_i)$ nach dem von Staudtschen Satz gleich -1 ist, genügt es zu zeigen, dass

(15) $$3r - 2p - 1 \geqq \nu_2(d)\,.$$

Nun ist in der Tat (siehe 4.5)

$$\nu_2(d) = \sum_{i=1}^{t} n_i - \sum_{i=1}^{t} \alpha(n_i) \leqq \sum_{i=1}^{t} n_i - 1 = r - 1,$$

womit (15) wegen $p \leqq r$ (siehe (12)) bewiesen ist.

4.7. Gegeben sei nun für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Aussage (5). Wir wollen daraus $q_k \equiv 0 \pmod 8$ herleiten. Für $k = 1$ erhalten wir

$$q_1 \equiv 0 \pmod 8 \qquad \text{(siehe (9))}.$$

Nehmen wir an, dass

$$q_k \equiv 0 \pmod 8 \tag{16}$$

bereits für alle k mit $1 \leqq k < k_0$ bewiesen ist. Dann folgt aus Lemma 4.6, aus (5) und aus (13), dass

$$2^{-1} \cdot (2k_0)!\, s_{k_0} \cdot q_{k_0} = \frac{-B_{k_0}}{4} q_{k_0}$$

ganz bezüglich 2 ist. Da $\nu_2(B_{k_0}) = -1$, folgt (16) für $k = k_0$.

4.8. Die vorstehenden Rechnungen haben ergeben, dass $q = p/p' \equiv 1 \pmod 8$, wo $1 \in H^0$. Also ergibt sich (vgl. 4.4)

Satz. — *Man fasse die Pontrjaginschen Klassen einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Elemente des durch das Torsionsideal dividierten ganzzahligen Cohomologieringes auf. Diese Pontrjaginschen Klassen sind modulo 8 Invarianten des Homotopietyps der Mannigfaltigkeit.*

Wu Wen-Tsun hat im Jahre 1954 für die Pontrjaginschen Klassen die Homotopie-Invarianz modulo 12 nachgewiesen. (On Pontrjagin classes III, *American Math. Soc. Translations*, Series 2, Vol. 11, S. 155-172 (1959).) Die Invarianz mod 3 ist eine Folgerung aus der Theorie der Steenrodschen reduzierten Potenzen. Die Invarianz modulo 4 folgt aus der Tatsache, dass die Pontrjaginschen Klassen modulo 4 aus den (bekanntlich homotopie-invarianten) Stiefel-Whitneyschen Klassen mit Hilfe der Pontrjaginschen Quadrate berechnet werden können. Bezüglich der Primzahl 2 haben wir also das Resultat von Wu

verbessert: Die Pontrjaginschen Klassen (im Sinne des obigen Satzes) sind Homotopie-Invarianten mod 24. (Die Invarianz modulo 12 gilt übrigens für die ganzzahligen Pontrjaginschen Klassen. Man braucht sie nicht modulo des Torsionsideals zu reduzieren.) Es ist anzunehmen, dass die Invarianz modulo 3 ebenfalls rein formal aus (5) hergeleitet werden kann. Diese formale Herleitung würde uns gelingen, wenn wir analog zum Lemma 4.6 nachweisen könnten, dass das Polynom

$$(2k)! \cdot \hat{A}_k(3a_1, \ldots, 3a_k)$$

ganz bezüglich der Primzahl 3 ist.

Natürlich liefert unsere Methode viel stärkere Invarianzaussagen als den vorstehenden Satz. Aber sie lassen sich nicht so leicht formulieren (vgl. (9)).

Zum Beispiel ergibt (9), dass für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X, für die $H^4(X; \mathbf{Q}) = 0$, die Pontrjaginsche Klasse der Dimension 8 (modulo Torsion) eine Homotopie-Invariante mod 120 ist.

Es sei noch erwähnt, dass die Methoden von [3] auch folgenden Satz ergeben.

SATZ. — *Es sei ξ ein reelles Vektorraum-Bündel über dem endlichen CW-Komplex X. Man nehme an, dass der stabile Faser-Homotopie-Typ von ξ gleich dem des trivialen reellen Vektorraum-Bündels ist. Die $4i$-dimensionale ganzzahlige Pontrjaginsche Klasse von ξ möge mit q_i bezeichnet werden. Dann ist*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(q_1, \ldots, q_j) = ch(\eta) ,$$

wo η ein Element des von den reellen Vektorraum-Bündeln bestimmten Unterringes von $K^0(X)$ ist (4.4). Insbesondere genügen die q_i den Relationen (9).

Vgl. hierzu M. F. Atiyah, Thom complexes (*Proc. London Math. Soc.*, (3), *11*, 291-310 (1961)).

Wendet man den vorstehenden Satz auf die reellen Vektorraum-Bündel über der Sphäre $\mathbf{S}^{4k}$ an, dann erhält man ein Resultat von J. Milnor und M. Kervaire über die stabile Homo-

topiegruppe $\pi_{n+4k-1}(\mathbf{S}^n)$ (*Proc. Intern. Congress of Math.*, Edinburgh, 1958, pp. 454-458).

§ 5. Einbettungsfragen.

5.1. Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$. Das A-Geschlecht $A(M^{4k})$ ist definiert als der Wert von $2^{4k}\hat{A}_k(p_1, \ldots, p_k) = A_k(p_1, \ldots, p_k)$ auf dem orientierten Grundzyklus von M^{4k}. Dabei sind $p_1, p_2, \ldots$ die Pontrjaginschen Klassen von M^{4k}, $(p_i \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z}))$. In [6, Part II] wurde gezeigt, dass $A(M^{4k})$ eine ganze Zahl ist. In [5] wurde folgender Satz bewiesen.

Satz. — *Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn M^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $8k - 2q$ differenzierbar einbettbar ist, dann ist $A(M^{4k})$ durch 2^{q+1} teilbar. Wenn ausserdem noch $q \equiv 2 \bmod 4$ ist, dann ist $A(M^{4k})$ durch 2^{q+2} teilbar.*

Der Beweis verläuft, indem man annimmt, dass X in der Sphäre der Dimension $8k - 2q$ eingebettet ist. Mit Hilfe geeigneter Darstellungen der orthogonalen Gruppe konstruiert man aus dem Normalbündel von X ein Element von $K^0(\mathbf{S}^{8k-2q})$, auf das man den Bottschen Satz anwendet (3.5).

5.2. Wie in 5.1 sei M^{4k} kompakt orientiert differenzierbar. Wir nehmen einmal an, dass M^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+4$ differenzierbar eingebettet werden kann. Dann können wir Satz 5.1 mit $q = 2k - 2$ anwenden und erhalten, dass $A(M^{4k})$ durch 2^{2k-1} und für gerades k sogar durch 2^{2k} teilbar ist.

5.3. Die Mannigfaltigkeit M^{4k} (siehe 5.2) sei in der Sphäre $\mathbf{S}^{4k+4}$ eingebettet. Die Pontrjaginschen Klassen des Normalbündels sollen mit $\overline{p_i} \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z})$ bezeichnet werden. Da das Normalbündel die Faser $\mathbf{R}^4$ hat, verschwindet $\overline{p_i}$ für $i > 2$. Ferner ist $\overline{p_2}$ das Quadrat der *Eulerschen Klasse des Normalbündels*, welche bei jeder Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine Sphäre verschwindet. Also ist $\overline{p_i} = 0$ für $i \geqq 2$. Nun ist