EINE KENNZEICHNENDE EIGENSGHAFT DER KUGEL

Autor(en): **Groemer, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37137

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EINE KENNZEICHNENDE EIGENSCHAFT DER KUGEL

von Helmut GROEMER

(Reçu le 1er septembre 1960)

In seinem Buch „A Collection of Mathematical Problems" stellt S.M.Ulam die folgende Aufgabe: Es sei K ein konvexer Körper konstanter Dichte, der die Eigenschaft hat, dass er sich in jeder Stellung auf einer ebenen horizontalen Unterlage im Gleichgewicht befindet. Folgt daraus, dass K eine Kugel ist ? Im folgenden soll diese Frage bejahend beantwortet werden. Es wird sich dabei zeigen, dass die Voraussetzung konstanter Dichte überflüssig ist, woraus dann insbesondere folgt, dass die Annahme der Konvexität von K nicht notwendig ist, da man ja zur konvexen Hülle $\overline{K}$ von K übergehen kann, wenn man die Dichte in $\overline{K} - K$ null setzt.

Dafür, dass sich K im Gleichgewicht befindet, ist notwendig, dass die vom Berührungspunkt von K mit der Unterlage ausgehende auf diese Ebene senkrecht stehende Gerade durch den Schwerpunkt von K geht. Die Behauptung ist demnach in dem folgenden Satz enthalten, der eine kennzeichnung der n-dimensionalen Kugel darstellt. Ist P ein Punkt des Randes von K, so heisse eine durch P gehende Gerade g eine Normale, wenn g auf einer P enthaltenden Stützebene von K senkrecht steht.

Satz: Hat ein n-dimensionaler konvexer Körper K die Eigenschaft, dass alle Normalen durch einen festen Punkt Q gehen, so ist K eine n-dimensionale Kugel mit dem Mittelpunkt Q.

Beweis: Es seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte am Rande von K und r_1, r_2 die Entfernungen $\overline{QP_1}$ bzw. $\overline{QP_2}$. Es genügt offenbar für alle P_1, P_2

$$r_2 \leqq r_1 \tag{1}$$

zu beweisen. Schneidet man K mit einer durch Q, P_1, P_2 gehenden zweidimensionalen Ebene E, so erhält man in E einen

konvexen Bereich C, auf dessen Rande P_1, P_2 liegen und dessen Normale alle durch Q gehen. Der Winkel zwischen r_1 und r_2 sei α ($\alpha \leqq \pi$). N bedeute irgendeine natürliche Zahl. g_i ($i = 0, 1, \ldots N$) sei definiert als eine durch Q gehende Gerade, die mit r_1 den Winkel $i \frac{N}{\alpha}$ einschliesst und in dem durch α bestimmten Winkelraum liegt. Man ziehe nun von P_1 ausgehend senkrecht zu g_0 eine Strecke l_1, bis man g_1 etwa in einem Punkt A_1 trifft. Von A_1 ziehe man eine Strecke l_2, bis man g_2 in einem Punkte A_2 trifft. So kann man fortfahren, bis man g_N erreicht. Die Strecken l_i liegen alle ausserhalb oder am Rande von C. Für l_1 folgt dies daraus, dass l_1 in einer durch P_1 gehenden Stützgeraden von C liegt. Da l_1 ausserhalb oder am Rande von C liegt, gilt dies auch für A_1 und daher auch für l_2, weil die auf g_2 senkrecht stehende Stützgerade von C zwischen l_2 und C liegt. Auf diese Weise gelangt man bis A_N. Es ist somit A_N ausserhalb oder am Rande von C. Wegen $A_N \in g_N$, $P_2 \in g_N$, $P_2 \in C$ gilt daher für den Abstand $d_N = \overline{QA_N}$

$$r_2 \leqq d_N \,. \tag{2}$$

Berechnet man d_N, so erhält man

$$d_N = \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N},$$

was mit (2)

$$r_2 \leqq \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N} \tag{3}$$

ergibt. Wegen

$$\lim_{N \to \infty} \left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N = 1$$

folgt aus (3) die mit dem zu beweisenden Satz äquivalente Behauptung (1).

Department of Mathematics
Oregon State College
Corvallis, Oregon, U.S.A.