LE THÉORÈME DE THUE-SIEGEL-ROTH

Autor(en): **Poitou, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37139

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LE THÉORÈME DE THUE-SIEGEL-ROTH [1])

par G. Poitou

(Reçu le 30 septembre 1960.)

Soit α un nombre algébrique de degré n, c'est-à-dire la racine d'une équation irréductible

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

à coefficients $a_1, \dots, a_n$ *rationnels*; supposons qu'il existe une infinité de fractions p/q telles que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}$$

où k est une constante fixe.

Il se trouve que cette constante k ne peut être très grande, ce qui signifie que les nombres algébriques irrationnels s'approchent assez mal par des rationnels. Le premier résultat de cette sorte est dû à Liouville ([1], [2]) qui a démontré que $k \leqslant n$. Ce résultat est intéressant historiquement, car c'est la première démonstration de l'existence des nombres transcendants. Par exemple, le nombre $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m!}$ est transcendant, car il s'approche par des rationnels (les sommes partielles) mieux que ne le permet le résultat de Liouville à un nombre algébrique.

On sait par ailleurs ([3], [4]) que l'équation (2) a, pour $k = 2$, une infinité de solutions p/q, quel que soit le nombre α réel irrationnel (non nécessairement algébrique). L'inégalité de Liouville $k \leqslant n$ ne peut donc être améliorée lorsque $n = 2$, c'est-à-dire pour les nombres α quadratiques; pour ceux-ci, elle résulte d'ailleurs aussi de la périodicité du développement en fraction continue, déjà démontrée par Lagrange ([5]) en 1770.

---

[1]) Conférence prononcée à Grenoble, dans le cadre des « Journées mathématiques de Grenoble », 21-22 mai 1960.

Par contre, pour $n > 2$, le résultat de Liouville a été recouvert par des majorations de k de plus en plus strictes:

$k \leqslant \frac{n}{2} + 1$ par Axel Thue en 1908 ([6], [7]);

$k \leqslant \frac{n}{s+1} + s$ pour chaque $s = 1, 2, \ldots, n - 1$ par C. L. Siegel dans sa thèse en 1921 ([8], voir aussi [9]); en prenant s au mieux, cette majoration est de l'ordre de $k \leqslant 2\sqrt{n}$;

$k \leqslant \sqrt{2n}$ par F. J. Dyson en 1947 ([10]), démonstration simplifiée par Mahler ([11]) et résultat retrouvé par Schneider ([12]) et par Gelfond ([13]).

Siegel avait conjecturé l'inégalité $k \leqslant 2$, qui a été établie par K. F. Roth en 1955 ([14]). Voir aussi ([15]).

Les démonstrations de Thue et de Siegel sont exposées dans le livre classique de Landau ([16],) avec leurs importantes applications, notamment à la finitude de solutions d'équations diophantiennes. Pour diverses questions analogues, en particulier pour l'étude des fractions voisines des zéros d'un polynôme à coefficients entiers, à la fois au sens de la valeur absolue ordinaire, et au sens d'un nombre fini de valuations p-adiques, contentons-nous de renvoyer à la bibliographie ([17], [18], [19], [20], [21]).

Quant à la démonstration de Roth elle-même, outre le mémoire original, elle est exposée complètement (sans parler de sa généralisation à l'approximation par des nombres algébriques) dans deux ouvrages récents [22, 23]. Cette démonstration étant assez difficile, elle a donné lieu à des exposés simplifiés (mais forcément incomplets) destinés à mettre en lumière les idées directrices, par l'auteur lui-même [24, 25] à l'occasion des congrès.

C'est un tel exposé que j'ai donné à Grenoble, et déjà en 1956 au séminaire d'Algèbre et Théorie des nombres de Paris. Il est évidemment inutile d'écrire encore une fois sur ce sujet, et je me bornerai donc à faire remarquer en quoi la démonstration récente de Roth s'apparente à la démonstration classique de Liouville.

Il est facile de montrer qu'on peut supposer les coefficients

$a_1, \ldots, a_n$ entiers rationnels, quitte à multiplier α par un entier rationnel. Posons $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ et désignons par B une borne supérieure de la valeur absolue de la dérivée de f dans un intervalle contenant α; donc si β appartient à cet intervalle, on a

$$| f(\beta) | = | f(\beta) - f(\alpha) | \leqslant B \, | \beta - \alpha |$$

En particulier, pour les fractions p/q vérifiant (2), avec un nombre fini d'exceptions, donc pour une infinité de fractions, et pour des dénominateurs q arbitrairement grands, on a les inégalités

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leqslant B \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{B}{q^k}$$

ce qui implique évidemment $k \leqslant n$.

La clé de cette démonstration de Liouville est le fait qu'un polynôme à coefficients entiers, pour des valeurs entières de la variable, s'il n'est pas nul, a une valeur absolue au moins égale à 1. Cette idée se retrouve dans la démonstration de Roth, où intervient de façon essentielle un polynôme $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ à un grand nombre de variables, et à coefficients entiers, ayant les propriétés suivantes:

(A) beaucoup de dérivées partielles de ce polynôme sont nulles au point $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$;

(B) ce polynôme a des coefficients point trop grands;

(C) ce polynôme a des degrés partiels point trop élevés;

(D) pour des fractions vérifiant (2) convenablement choisies, on a

$$Q\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_m}{q_m}\right) \neq 0$$

Alors, les conditions (A) et (B) entraînent que $\left| Q\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_m}{q_m}\right) \right|$ est majoré, tandis que les conditions (C) et (D) en donnent une minoration. De la comparaison de ces deux inégalités résulte le théorème. Naturellement, il faut d'abord remplacer les énoncés précédents par des assertions précises, et surtout *prouver l'existence* d'un polynôme Q vérifiant ces assertions. Il faut pour cela

mettre en œuvre une technique délicate, qui assure d'abord l'existence d'un polynôme vérifiant toutes ces conditions, sauf la dernière; mais on montre que ce polynôme possède une dérivée partielle convenable, qui, elle, vérifie toutes les conditions voulues[1]).

BIBLIOGRAPHIE

1. Liouville, J., Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. *C. R. Ac. Sc. Paris*, 18 (1844), pp. 883-885 et 910-911.
2. Même titre, *J. Math. pures et appl.*, 16 (1851), pp. 133-142.
3. Lejeune-Dirichlet, P.-G., *Oeuvres*, t. I, p. 635.
4. Hardy, G. H., E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*. Oxford, 1938-1945-1954, chap. 11.
5. Lagrange, J.-L., Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. *Mém. Ac. Roy. Sc. et Belles-Lettres de Berlin*, t. 24; *Œuvres*, t. 2, pp. 581-652.
6. Thue, A., *On en general i store hele tal uløsbar ligning*. Skrifter udgivne af Videnskabs Selskabet i Christiania, 1908.
7. —— Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J.f.d. reine u. angew. Math.*, 135 (1909), pp. 284-305.
8. Siegel, C. L., Approximation algebraischer Zahlen. *Math. Zeitschrift*, 10 (1921), pp. 173-213.
9. —— Ueber Näherungswerte algebraischer Zahlen. *Math. Ann.*, 84 (1921), pp. 80-99.
10. Dyson, F. J., The approximation to algebraic numbers by rationals. *Acta Math.*, 79 (1947), pp. 225-240.
11. Mahler, K., On Dyson improvement of the Thue-Siegel theorem. *Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam*, 52 (1949), pp. 1175-1184.
12. Schneider, T., Ueber eine Dysonsche Verschärfung des Thue-Siegelschen Satzes. *Arch. Math.*, 1 (1948-49), pp. 288-295.
13. Gelfond, A. O., *Nombres transcendants et algébriques* (en russe). Moscou, 1952, chap. 1.
14. Roth, K. F., Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2 (1955), pp. 1-20.
15. Schneider, T., Ueber die Approximation algebraischer Zahlen. *J.f.d. reine u. angew. Math.*, 175 (1936), pp. 182-192.
16. Landau, E., *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Leipzig, 1927, III, pp. 37-65.
17. Mahler, K., Zur Approximation algebraischer Zahlen. I. *Math. Ann.*, 107 (1933), pp. 691-730.
18. Même titre, II. *Math. Ann.*, 108 (1933), pp. 37-55.

---

[1]) Récemment, S. Lang a déduit du résultat de Roth de nouvelles et importantes applications aux équations diophantiennes. Voir: On a theorem of Mahler, *Mathematika* 7 (1960), p. 139-140; Integral points on curves, *Publ. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques*, n° 6, p. 27-43; Arithmetic Geometry, à paraître.

19. DAVENPORT, H., K. F. ROTH, Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2 (1955), p. 160.
20. RIDOUT, D., Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 4 (1957), pp. 125-131.
21. The p-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem. *Mathematika*, 5 (1958), pp. 40-48.
22. LE VEQUE, W. J., *Topics in numbers theory*. Addison-Wesley, 1956, II, chap. 4.
23. CASSELS, J. W. S., *An introduction to diophantine approximation*. Cambridge, 1957, chap. 6.
24. ROTH, K. F., Rational approximations to algebraic numbers. *Colloque sur la Théorie des nombres, Bruxelles*, décembre 1955, pp. 119-126.
25. —— Rational approximations to algebraic numbers. *Proceedings of the international congress of mathematiciens*, 1958, pp. 203-210.

G. POITOU

Institut de mathématiques de l'Université de Lille
13, place Philippe-Lebon, Lille.