**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 8 (1962)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DIE BEHANDLUNG DES HAUPTSATZES DER INTEGRALRECHNUNG IN DER SCHULE

**Autor:** Bunt, L. N. H.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-37972

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# DIE BEHANDLUNG DES HAUPTSATZES DER INTEGRALRECHNUNG IN DER SCHULE [1]

von L. N. H. Bunt

1. Die Integralrechnung ist ein Punkt des Mathematikprogramms der holländischen höheren Schulen vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Typus. Sie wird in der höchsten Klasse unterrichtet und stellt den zweiten Teil des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung dar. Der erste Teil umfasst die Elemente der Differentialrechnung.

Obwohl man nicht sagen kann dass es in der Natur der Dinge liegt das Studium der Infinitesimalrechnung mit der Differentialrechnung anzufangen, scheint diese Anordnung des Stoffes in der höheren Schule doch wohl allgemein üblich zu sein. Auf jeden Fall geschieht es auf diese Weise in den holländischen Schulen. Man behandelt bei der Differentialrechnung folgende Themen: Grenzwerte von Folgen und Funktionen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit; Ableitung von ganzen rationalen Funktionen, von trigonometrischen Funktionen, von Wurzelfunktionen, von Produkten und Quotienten differenzierbarer Funktionen; die Kettenregel; die Berechnung von Extremwerten und was weiter zur sog. Kurvendiskussion gehört, einschliesslich der geometrischen Deutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung.

Und dann, ganz am Ende dieser Kursus, kommt die Behandlung der Elemente der Integralrechnung. Diese umfasst: das unbestimmte Integral, dargestellt als Fläche deren Inhalt sich mit $x$ verändert; die grundlegende Beziehung zwischen einem unbestimmten Integral und der zu integrierenden Funktion, das heisst: die Ableitung eines unbestimmten Integrals ergibt die zu integrierende Funktion; einige elementare unbestimmte Integrale; das bestimmte Integral und sein Zusammenhang mit dem unbestimmten; die Berechnung des bestimmten Integrals; und einige praktische Anwendungen, wie die Arbeit als Integral,

[1] Am 27. Juni 1961 als Vortrag beim Seminar der C.I.E.M. in Lausanne gehalten.

das elektrische Potential, und die Berechnung des Volumens eines Körpers.

2. Bevor wir zur näheren Besprechung des Unterrichts in der Integralrechnung übergehen, möchte ich etwas über die Veranschaulichung des Differentialquotients und der abgeleiteten Funktion sagen.

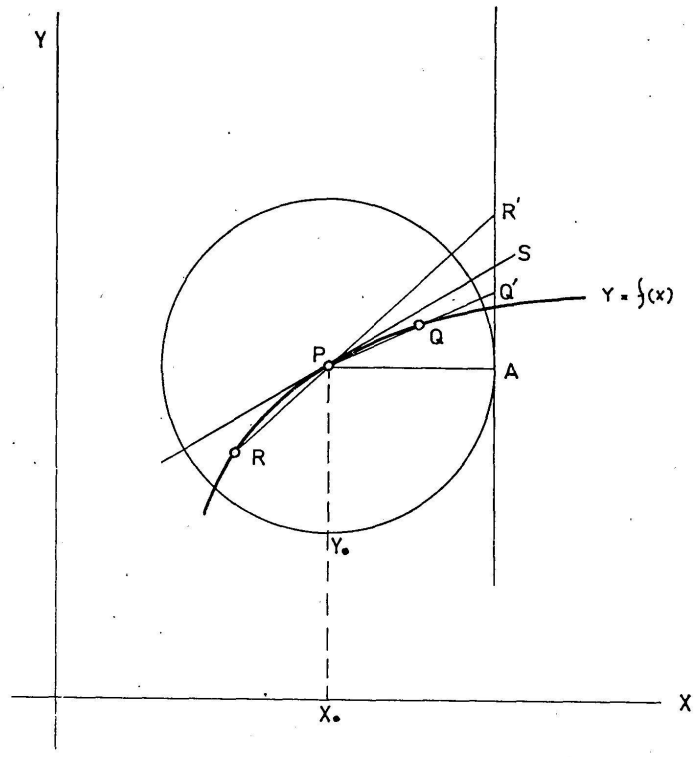


Fig. 1.

Die Ableitung $y_0' = f'(x_0)$ der Funktion $y = f(x)$ für einen gewissen Wert von $x$ wird in der Figur gedeutet als der Tangens des Winkels zwischen der Tangenten im Punkte $P$ mit Abszisse $x_0$ an der Kurve $y = f(x)$ und der positiven $x$-Achse (Fig. 1). Man bekommt diesen Tangens als Limes des Tangens des Winkels welchen eine um $P$ drehende Sekante der Kurve mit der positiven $x$-Richtung bildet. Wegen des Auftretens so vieler Tangenten liegt es auf der Hand den Einheitskreis um $P$ mit der ihn rechtsseitig berührenden vertikalen Tangente zu zeichnen. Hiervon wird von der bewegenden Sekante ein Stück abgeschnitten gleich dem Tangens des Winkels zwischen dieser Sekante und der $x$-Achse; so ist z. B. $AQ' = tg \measuredangle APQ$. Lässt man nun im Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Nenner nach null

streben, dann bewegt sich der Punkt $Q$ längs der Kurve nach $P$, während die Projektion $Q'$ von $Q$ auf der Tangentenlinie im allgemeinen einem Grenzstand zustrebt. Wir betrachten weiter einen Punkt $R$, an der anderen Seite von $P$ auf der Kurve gelegen, und auch diesen Punkt lassen wir beliebig nahe an $P$ heranrücken und projizieren wir auf die vertikale Tangente. Der normale Fall ist, dass $Q'$ und $R'$ demselben Grenzstand zustreben. Nennt man diesen Punkt $S$, dann ist $AS$ der Limes des Differenzenquotients, das heisst die Ableitung.

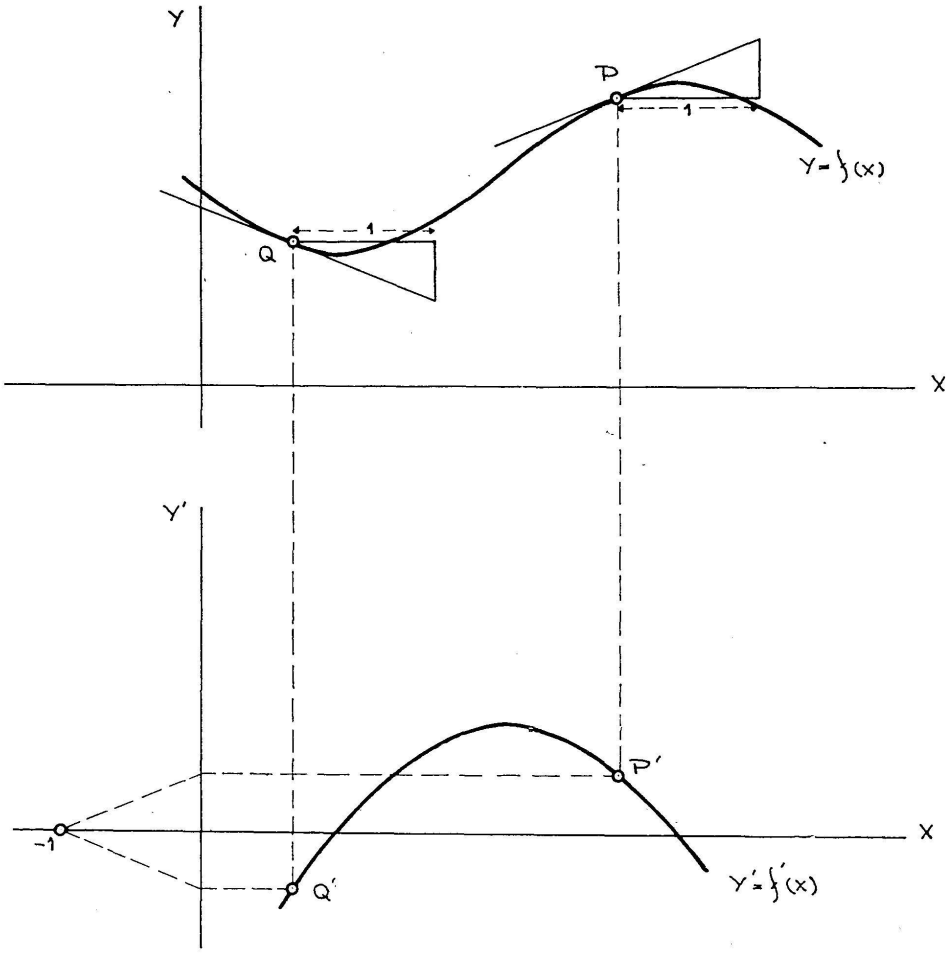


Fig. 2.

Diese Veranschaulichung des Differentialquotients wollen wir jetzt benutzen um die Ableitung einer gegebenen Funktion graphisch darzustellen. Man braucht dabei nicht die analytische Form der gegebenen Funktion zu kennen; es genügt wenn die Funktionskurve gezeichnet vorliegt. Eine praktische Methode die abgeleitete Kurve Punktweise zu zeichnen ist folgende. Im oberen Teil von Fig. 2 ist die Funktion $y = f(x)$ graphisch dar-

gestellt, und im unteren Teil wollen wir die abgeleitete Kurve zeichnen. Um die Ableitung im Punkte $P$ zu zeichnen, könnte man $\Delta\ PAS$ von Fig. 1 benutzen. Es ist aber praktischer diesen und alle solche Dreiecke parallel zu verschieben nach dem Punkt mit Abszisse $-1$ auf der unteren $x$-Achse. Die Konstruktion des Punktes $P'$ ist dann wie folgt: man zieht die Tangente in $P$ und bringt durch den Punkt $-1$ der unteren $x$-Achse die Parallele; durch den Schnittpunkt mit der $y'$-Achse zieht man eine Parallele zur $x$-Achse; der Schnittpunkt mit der Vertikalen durch $P$ ergibt den Punkt $P'$. Wenn man die Handgriffe einmal kennt, kann man sehr rasch eine grosse Anzahl Punkte der abgeleiteten Kurve konstruieren. Dabei braucht man nicht einmal die Tangenten an der Urkurve tatsächlich zu zeichnen; es genügt wenn man das Zeichendreieck in der guten Richtung anlegt, es parallel verschiebt nach dem Punkte $-1$, den Schnittpunkt mit der $y'$-Achse angibt, usw. Arbeitet man auf graphischem Papier, dann braucht man gar keine Linien zu ziehen.

Der Effekt ist am grössten wenn man einige Ableitungskurven schon beim Anfang der Behandlung der Differentialrechnung zeichnen lässt. Es ist für viele Schüler eine Ueberraschung bei der Funktion $\frac{1}{2}x^2$ als abgeleitete Kurve eine gerade Linie zum Vorschein zu bringen, bei $\frac{1}{8}x^3$ eine Parabel und bei $\sin x$ und $\cos x$ Kurven, die kongruent sind mit den Urkurven. In dieser Weise werden induktiv schon die Gleichungen von einigen Ableitungen gefunden, was das Interesse erregt für den später zu erbringenden Beweis.

3. Jetzt wollen wir uns näher beschäftigen mit dem Beweis des Hauptsatzes der Integralrechnung, das heisst des Satzes

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Der in der Schule übliche Beweis besteht aus den folgenden Teilen:

*a*) Ist $f(x)$ eine primitive Funktion von $f'(x)$, dann hat jede primitive Funktion von $f'(x)$ die Form $f(x)+C$;

*b*) der von der Kurve $y = f'(x)$, den zu den Abszissen $a$ und $x$ gehörigen Ordinaten und der $x$-Achse begrenzte Flächeninhalt $F_a^x$ ist eine primitive Funktion von $f'(x)$;

*c*) aus *a* und *b* ergibt sich: $F_a^x$ kann geschrieben werden in der Form $f(x)+C$;

*d*) $C = -f(a)$;

*e*) aus *c* und *d* ergibt sich: $F_a^x = f(x)-f(a)$;

*f*) $F_a^b = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Sigma f'(x)\Delta x = \int\limits_a^b f'(x)dx$;

*g*) aus *e* und *f* ergibt sich: $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$.

4. Ein solcher Beweis ist langatmig und verwickelt. Die Schüler finden es schwierig die zahlreichen Teile dieses Beweises auseinander zu behalten und das Ganze zu übersehen. Wenn man den Beweis also in dieser Weise erbringen will, ist es zum wenigsten von Bedeutung, dass die verschiedenen Unterteile so viel wie möglich graphisch illustriert werden. Ich habe nicht die Absicht, für den vorhin angeführten Beweis Propaganda zu machen; ich möchte gleich einen ganz anderen Beweis vorschlagen. Zuvor ist es aber interessant nachzugehen inwieweit die Teile des erwähnten Beweises anschaulich zu deuten sind und wo unsere Anschauung uns im Stich lässt.

*a*) Ist $f(x)$ eine primitive Funktion von $f'(x)$, dann hat jede primitive Funktion von $f'(x)$ die Form $f(x)+C$.

Mit diesem Satz und ihrem Beweis wird in den Schulbüchern auf allerhand Weise umgesprungen. Manchmal wird der Satz gar nicht genannt aber wohl stillschweigend benutzt; oder er wird genannt und es wird bemerkt, dass er nicht bewiesen werden wird; bald wird er genannt und überdies bewiesen, aber dann wird entweder der unbewiesene Hilfssatz verwendet, dass nur von einer konstanten Funktion die Ableitung identisch gleich null ist, oder derselbe Hilfssatz wird verwendet und auch bewiesen, unter Benutzung von anschaulichen Hilfsmitteln.

Nach meiner Meinung kann man diesen Satz am besten vorbereiten indem man den Schülern die graphische Darstellung einer Funktion $f'(x)$ gibt und sie auffordert dazu die graphische Darstellung einer primitiven Funktion zu zeichnen. Es zeigt sich, dass die primitive Kurve in willkürlicher Höhe angefangen werden kann, und ebenso an welcher Klippe die Konstruktion

scheitern wird. Man kann nämlich wohl damit anfangen (Fig. 2) auf der gegebenen Kurve einen Punkt $P'$ zu wählen, dann durch $P'$ eine Parallele zur $x$-Achse ziehen bis zum Schnittpunkt mit der $y'$-Achse, diesen Punkt mit dem Punkte $-1$ verbinden, und die Verbindungslinie parallel verschieben bis sie durch $P$ geht, wobei $P$ irgendwo senkrecht über $P'$ angenommen ist; damit hat man in der Tat die Tangente in $P$ an der primitiven Kurve durch $P$ konstruiert. Wählt man aber sodann einen zweiten Punkt, $Q'$, auf der gegebenen Kurve und in der Nähe von $P'$, und versucht man dieselbe Konstruktion für $Q'$ auszuführen, dann findet man jetzt wohl die Richtung der Tangente in $Q$, aber nicht diese Tangente oder den Punkt $Q$ selbst. Und es ist also ebensowenig möglich den Schnittpunkt der Tangenten in $P$ und $Q$ zu finden. Trotzdem kann man doch wohl eine ziemlich gute Annäherung der gesuchten primitiven Kurve bekommen, wenn man wie folgt den Knoten zerhaut: man wählt einfach als Abszisse des gesuchten Schnittpunktes das Mittel der (bekannten) Abszissen der Berührungspunkte $P$ und $Q$, und handelt in allen folgenden Fällen in derselben Weise.

Intuitiv ist der Satz sehr plausibel: betrachtet man zwei primitive Kurven, dann kann man sich einfach nicht vorstellen, dass wohl immer die Tangenten in zwei vertikal über einander liegenden Punkten parallel sind, aber dass die Entfernung solcher Punkte nicht konstant ist. Nun wird dem Beweis, wie vorhin schon angedeutet, wohl folgende Form gegeben. Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei primitive Funktionen von $f'(x)$, dann ist die Ableitung von $g(x)-f(x)$ überall null. Ihr Bild hat also in jedem ihrer Punkte eine Tangente die parallel zur $x$-Achse ist. Daraus folgt, dass das Kurvenbild selbst eine Gerade, parallel zur $x$-Achse ist. Also $g(x)-f(x) = C$, und also $g(x) = f(x)+C$. Man betrachtet dann den Hilfssatz, dass eine Kurve deren Tangenten alle parallel zur $x$-Achse sind, selbst eine Gerade, parallel zur $x$-Achse ist, als selbstverständlich. Dieser Hilfssatz ist in der Tat intuitiv ganz klar, ebenso wie der Satz den wir mit dessen Hilfe beweisen wollen. Es ist mir aber unmöglich zu sagen, welchen von den Zweien ich den selbstverständlichsten finde, den Satz selbst oder den Hilfssatz, und deswegen kommt es mir vor, dass man den angeführten Beweis ohne Nachteil weglassen kann.

Bekanntlich kann man einen einfachen analytischen Beweis des genannten Hilfssatzes geben unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Dieser Satz steht aber nicht auf dem mathematischen Programm der holländischen Schulen.

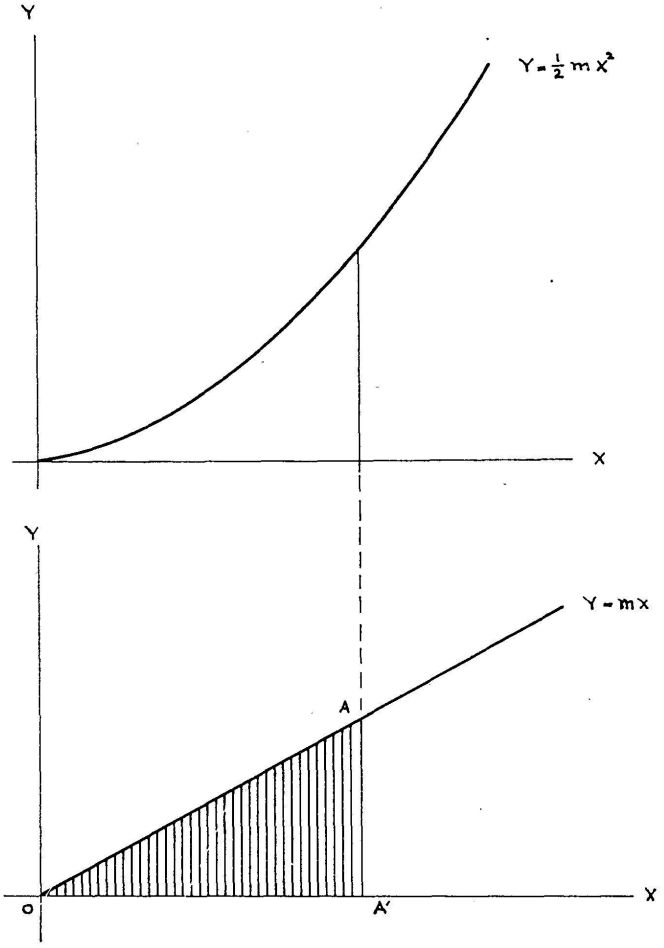


Fig. 3.

5. *b*) Der Flächeninhalt $F_a^x$ ist eine primitive Funktion von $f'(x)$.

Zuerst soll klargemacht werden, dass $F_a^x$ eine Funktion von $x$ ist. Dazu kann man z. B. von der Funktion $y = mx$ ausgehen, (Fig. 3), und die schraffierte Fläche als Funktion von $x$, die Abszisse des Punktes $A$, berechnen und graphisch darstellen.

Der Inhalt von $\Delta\, OAA'$ ist $^1/_2 mx^2$, d. h. es entsteht eine Funktion welche den Schülern schon bekannt ist. In dieser Weise wird nicht nur gezeigt, dass $F_a^x$ eine Funktion von x darstellt, sondern die Schüler sehen jetzt auch wie einfach die Art einer solchen Funktion sein kann; überdies werden sie induktiv mit der Tatsache bekannt gemacht, dass eine solche Funktion gerade eine primitive Funktion von $f'(x)$ ist.

Auch der Beweis des allgemeinen Falles, nämlich dass $F_a^x$ eine primitive Funktion von $f'(x)$ darstellt, kann man noch aus einer Figur ablesen. Bezeichnen wir $F_a^x$ mit $F(x)$, dann soll die Definition der Ableitung von $F(x)$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$, angewandt werden. Diese Limesannäherung kann man jetzt nicht in der üblichen Weise in einer Figur deuten, nämlich mittels einer Sekante, die gedreht wird bis sie ihren Limesstand erreicht. Eine Zunahme der Funktion $F(x)$ wird jetzt veranschaulicht durch ein Flächenstück. Etwas ähnliches ist den Schülern nicht vorher begegnet und, soweit ich sehen kann, ist es auch nicht vorzubereiten durch die Lösung von praktisch tauglichen Uebungsaufgaben, wie das der Fall ist bei der Behandlung des Differentialquotienten als des Tangenten eines Winkels. Aber auch in diesem neuen Falle gibt es jedenfalls eine geometrische Interpretation der Zunahme der Funktion, welche überdies eine geometrische Interpretation des Differenzenquotienten gestattet. Wenn man nämlich kein Bedenken hat gegen die stillschweigende Anwendung des Satzes von Weierstrass dass eine kontinuierliche Funktion jeden Wert zwischen dem kleinsten und grössten Wert annimmt, wird dieser Differenzenquotient dargestellt durch die Ordinate eines Punktes des krummlinigen oberen Randes des schmalen Streifens, der $\Delta F$ darstellt. Und dann kann man weiter in der Figur unmittelbar sehen, dass der Limes dieser Ordinate gleich $f(x)$ ist, wenn $\Delta x$ nach null strebt. Ich glaube, dass es sehr wichtig ist diesen Teil des Beweises in einer solchen konkreten Form zu erbringen. Es ist merkwürdig, dass die meisten Schulbücher den Beweis nicht in dieser Form geben, und ich kann das nur erklären aus einer gewissen Abneigung gegen die Anwendung eines in der Schule nicht bewiesenen Satzes, wie des Weierstrass'schen Satzes. Man beweist nämlich den Satz, dass

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

meistens in folgender Weise (Fig. 4):

Inhalt Rechteck $PQRS < \Delta F <$ Inhalt Rechteck $PQR'S'$,

$$f'(x) \cdot \Delta x < \Delta F < f'(x+\Delta x) \cdot \Delta x,$$

$$f'(x) < \frac{\Delta F}{\Delta x} < f'(x+\Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f'(x).$$

Natürlich ist es gar nicht schwierig einzusehen, dass die letzte Regel eine logische Konsequenz der ersten ist; aber die Einsicht dass der Satz völlig selbstverständlich ist, braucht nicht an-

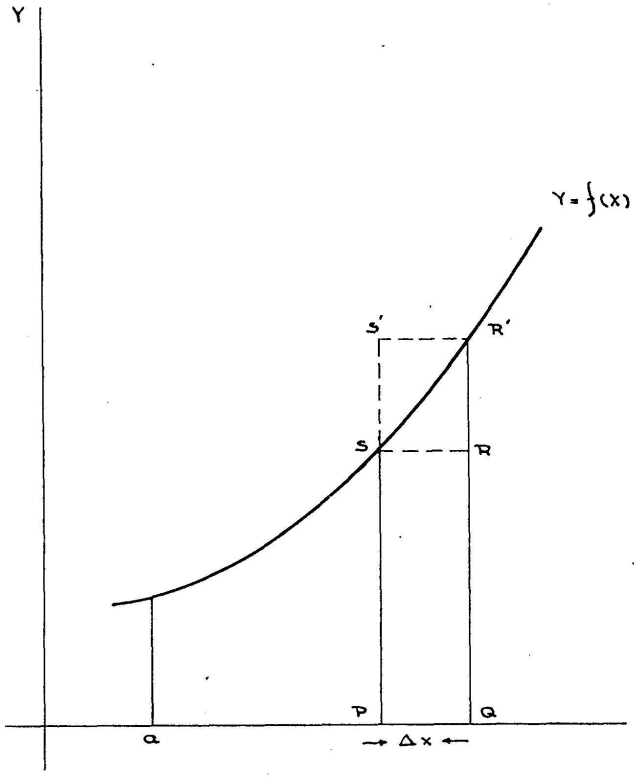


Fig. 4.

wesend zu sein. Die geometrische Deutung hat im Anfang eine gewisse Rolle gespielt, nämlich wo man zu einem "unteren" und einem "oberen" Rechteck gelangt, aber das intuitive Verständnis wird gerade in dem entscheidenden Moment ausgeschaltet und durch einen mechanischen algebraischen Prozess ersetzt: die Glieder von zwei Ungleichungen durch eine Zahl $\Delta x$ teilen, $\Delta x$ nach null streben lassen und den Differentialquotienten auffangen, der aus dem Automaten rollt. Wir sollten uns nicht beklagen wenn die Schüler uns hier "schwierig" finden.

Ich übergehe die mögliche Veranschaulichung der übrigen Glieder des üblichen Beweises des Hauptsatzes. Nur möchte ich noch hinzufügen, dass das Glied $f$):

$$F_a^b = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma f'(x) \Delta x = \int_a^b f'(x)\, dx$$

in der Schule nicht streng behandelt werden kann. Wir nehmen an, dass intuitiv klar ist was man unter den Flächeninhalt einer krummlinigen Figur verstehen soll, und dass es keinen Unterschied macht in welcher Weise man die Rechtecke wählt, deren Summe diesen Flächeninhalt approximieren soll, wenn man nur dafür Sorge trägt, dass sie sich der Kurve anschliessen und ihre maximale Breite nach null strebt.

6. Jetzt möchte ich zeigen, dass es möglich ist einen Beweis zu erbringen, den die Schüler nicht nur leicht verstehen können weil er viel weniger Glieder umfasst und sich ihrer intuitiven Einsicht völlig anschliesst, sondern auch beinahe von ihnen selbst gefunden werden kann. Dabei wollen wir voraussetzen dass die vorhin erwähnten Elemente der Differentialrechnung behandelt worden sind, inklusive der Bedeutung der zweiten Ableitung, dass die Definition des bestimmten Integrals als Limes einer Summe von Rechtecken gegeben worden ist, und die Begriffe "kontinuierlich" und "differenzierbar", auch in ihrer geometrischen Bedeutung, behandelt worden sind. Insbesondere wollen wir annehmen, dass die Schüler recht gründlich geübt worden sind in dem Zeichnen der abgeleiteten Kurve in der Weise die ich schon auseinandergesetzt habe, und z. B. auch schnell die abgeleitete Kurve zu zeichnen wissen, wenn die Urkurve eine Gerade ist oder aus einer endlichen Anzahl Liniensegmenten besteht.

Wir stellen uns jetzt vor, dass wir damit anfangen den Schülern eine Reihe von Aufgaben vorzulegen die selbständig zu lösen sie aufgefordert werden. Die erste Aufgabe ist folgende.

*Aufgabe* 1. *a*) Kontrolliere in Fig. 5 die Konstruktion der Abgeleiteten Kurve $y' = f'(x)$ von der Kurve $y = f(x)$.

*b*) Beweise: $F = htg\, \alpha = p = f(b) - f(a)$ (das heisst: die Anzahl der Flächeneinheiten der schraffierten Fläche ist gleich der Anzahl der Längeneinheiten des Segmentes $BC$.

In den Aufgaben 2 und 3 wollen wir voraussetzen, dass die Funktione $f(x)$ definiert sind für die Werte von $x$ die zum

Interval $(a, b)$ der $x$-Achse gehören, und dass die Funktionskurven Linienketten sind; im oberen Teil der zugehörigen Figuren 6 und 7 sind diese Kurven gezeichnet. Wählt man in

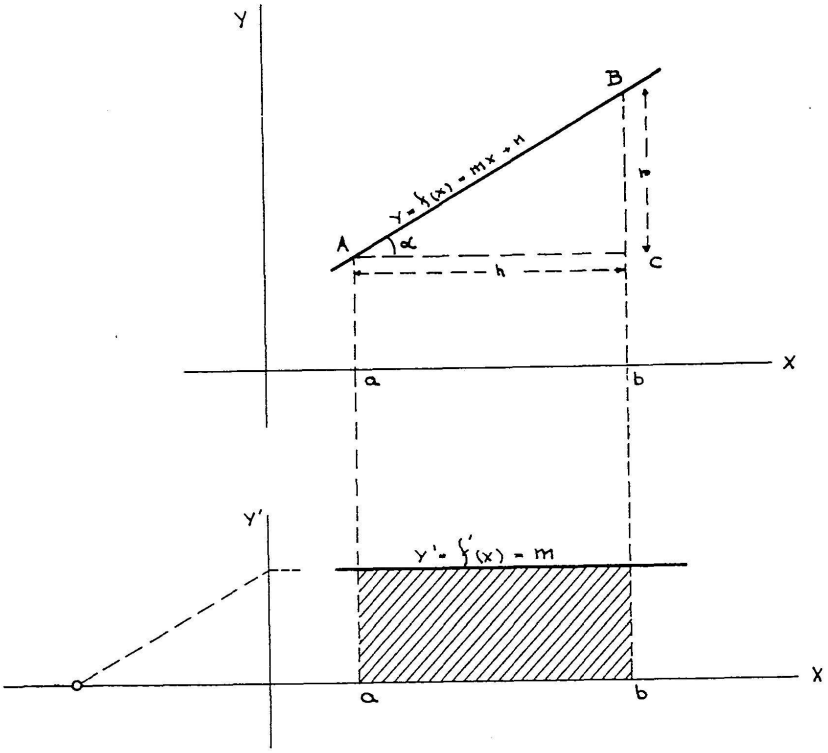


Fig. 5.

Fig. 6 einen Punkt irgendwo zwischen $A$ und $P$, dann ist die Steigung der Kurve, das heisst die Funktion $y' = f'(x)$, in diesem Punkt gleich dem Tangenten des Winkels zwischen $AP$ und der positiven $x$-Richtung. Analog für einen Punkt zwischen $P$ und $B$. Im Punkte $P$ aber gibt es keine Ableitung. Ebenfalls gibt es keine Ableitung in den Punkten $P$, $Q$, $R$ und $S$ von Fig. 7. Es ergibt sich, dass bei einer solchen Funktion $y = f(x)$, dargestellt von einer Linienkette, die Ableitung $y' = f'(x)$ für einige Werte von $x$ nicht definiert ist; die abgeleitete Kurve wird jetzt aus zwei oder mehreren wagerechten Liniensegmenten bestehen, wozu nicht alle Endpunkte gerechnet werden sollen.

*Aufgabe* 2. *a*) Kontrolliere in Fig. 6, dass die abgeleitete Kurve $y' = f'(x)$ der Urkurve $y = f(x)$ aus den zwei Liniensegmenten $CD$ und $EF$ (ohne die Endpunkte $D$ und $E$) besteht.

*b*) Beweise: $\Sigma F = p = f(b) - f(a)$. ($\Sigma F$ ist die Summe der Inhalte der schraffierten Rechtecke.)

*Aufgabe* 3. Die analogen Fragen für Fig. 7.

In jeder der Figuren 8 bis 11 ist immer der zwischen den Punkten $A$ und $B$ liegende Teil derselben Kurve $y = f(x)$ ge-

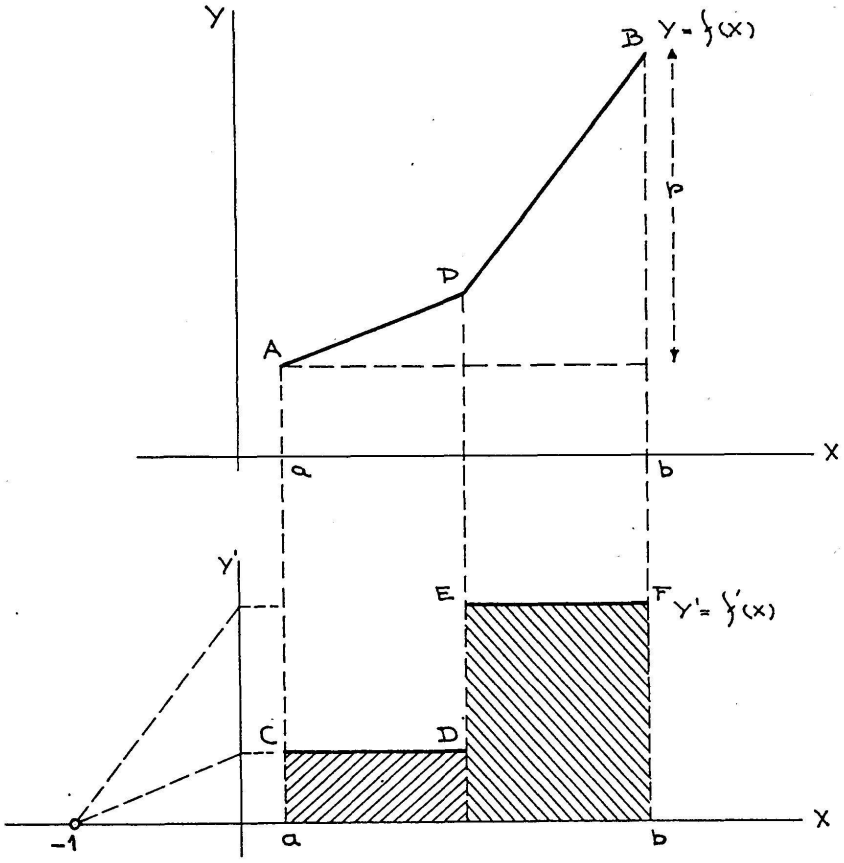


Fig. 6.

zeichnet, samt dem entsprechenden Teil $A'B'$ der abgeleiteten Kurve $y' = f'(x)$. Wir setzen voraus, dass der betrachtete Teil der Funktion positiv ist und monoton wächst, und dass die zweite Ableitung positiv ist.

*Aufgabe* 4 (Fig. 8). In $A$ und $B$ sind die Tangenten $AP$ und $BP$ an die Kurve $y = f(x)$ gezogen. Diese bilden zusammen den Linienzug $APB$, die wir als die Bildkurve der Funktion $y = g_1(x)$ betrachten wollen. Beweise:

*a*) Die abgeleitete Kurve $y' = g_1'(x)$ der Kurve $y = g_1(x)$ besteht aus dem horizontalen oberen Rand der schraffierten Figur (ohne die Punkte $C$ und $D$).

*b*) $\Sigma F = f(b) - f(a)$.

*Frage.* Wenn im unteren Teil von Fig. 8 die Bildkurve der Funktion $y' = f'(x)$ gezeichnet vorliegt, aber nicht die Bild-

kurve von $y' = g_1'(x)$, kann man dann die zuletztgenannte Kurve auch zeichnen unter Benutzung des Bildes der Funktion $y' = f'(x)$ und ohne den Punkt $-1$ der $x$-Achse zu benutzen ?

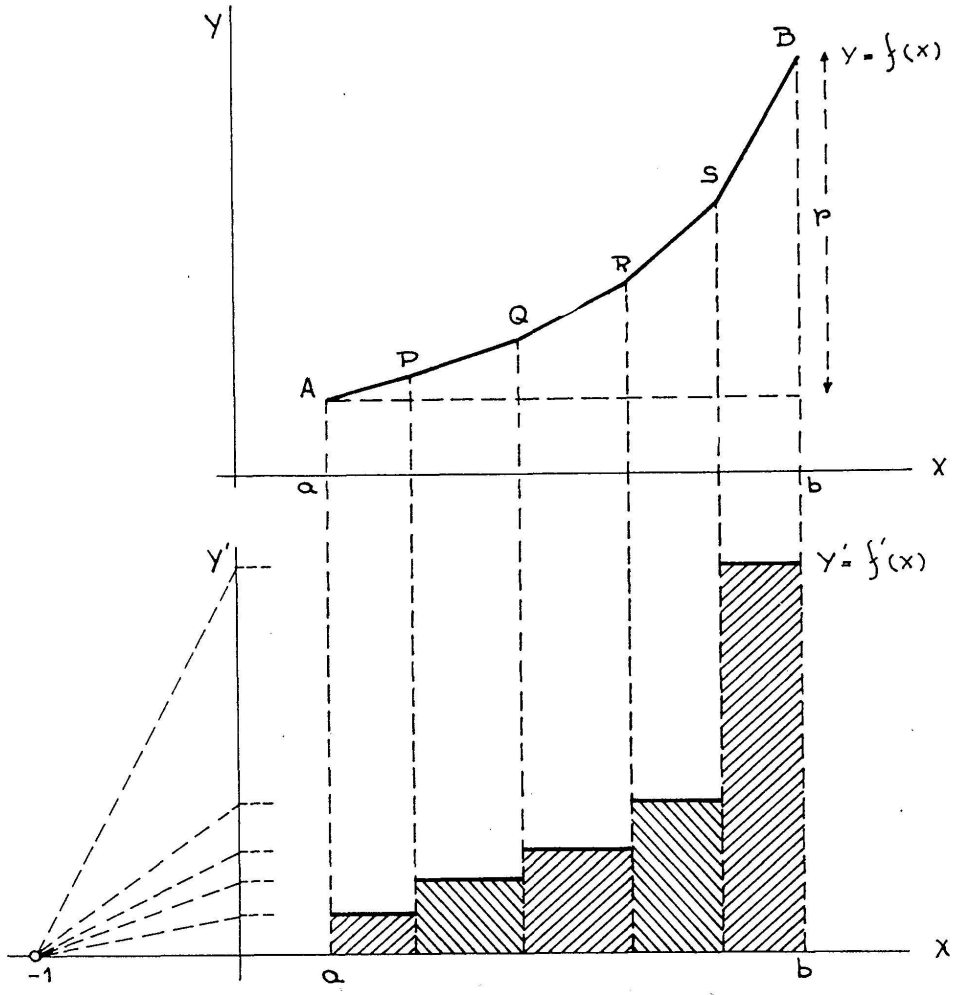


Fig. 7.

*Antwort.* Ja ! Der Anstieg des Liniensegmentes $AP$ ist ja gleich dem Anstieg des Bogens $AB$ im Punkte $A$, d. h. gleich der Ableitung von $y = f(x)$ für $x = a$, und diese wird dargestellt durch die Ordinate $aA'$ des Punktes $A'$ im unteren Teile der Figur. Also gehört zum Teil $AP$ des Bildes der Funktion $y = g_1(x)$ das horizontale Liniensegment $A'C$ des Bildes der Ableitung $y' = g_1'(x)$. In derselben Weise findet man, durch Benutzung des Punktes $B'$ auf dem Bilde von $y' = f'(x)$, das Liniensegment $DB'$ als Bild der Ableitung des durch $PB$ dargestellten Teiles.

*Aufgabe* 5 (Fig. 9). An der Kurve $y = f(x)$ der Aufgabe 4 sind die drei Tangenten $AP$, $PQ$ und $QB$ gezogen ($c$ ist die Mitte

von $ab$). Diese bilden zusammen den Linienzug $APQB$, den wir als das Bild der Funktion $y = g_2(x)$ betrachten.

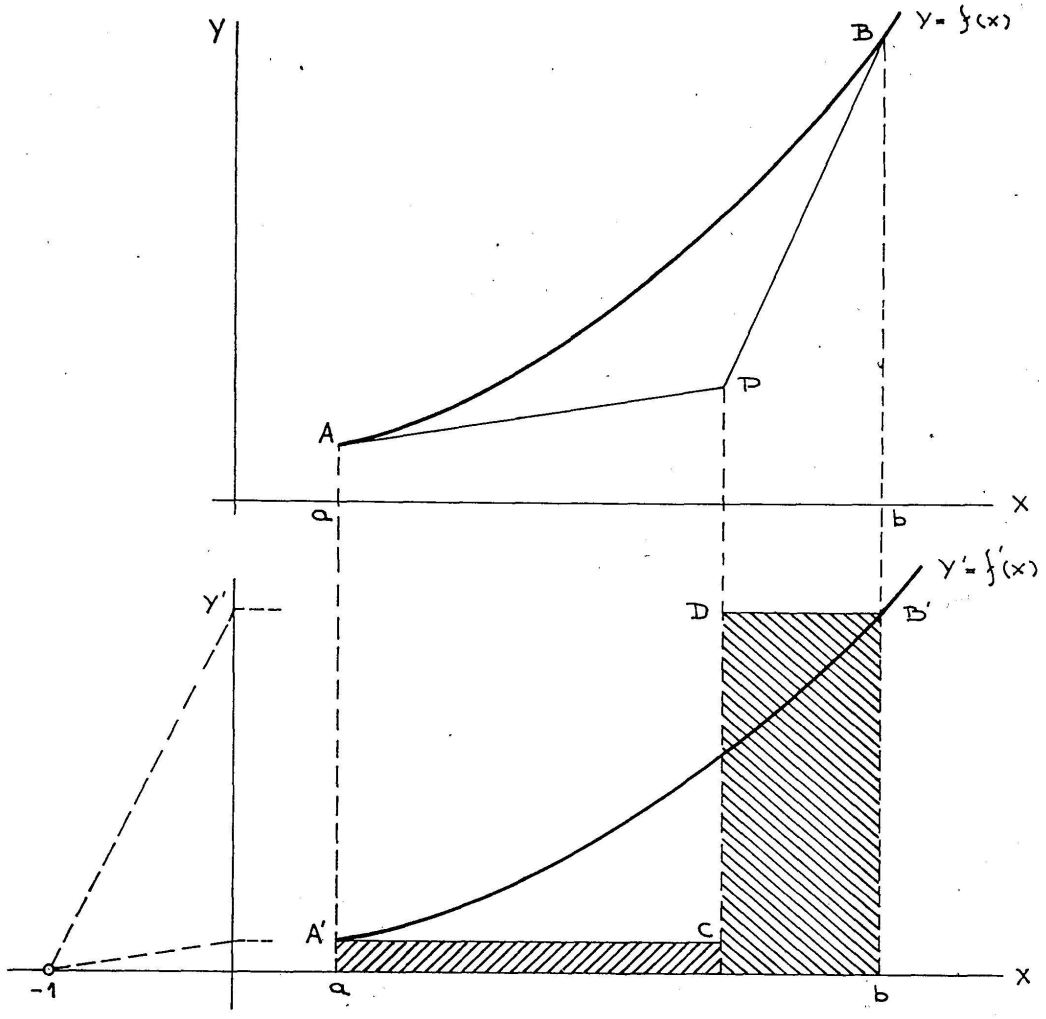


Fig. 8.

Beweise: $a$) Die Ableitung $y' = g_2'(x)$ der Funktion $y = g_2(x)$ hat zum Bild den horizontalen oberen Rand der schraffierten Figur (mit Ausnahme von einigen Endpunkten).

$b$) $\Sigma F = f(b) - f(a)$.

*Aufgabe* 6 (Fig. 10). An derselben Kurve $y = f(x)$ wie in den Aufgaben 4 und 5 sind jetzt die fünf Tangenten $AP$, $PQ$, $QR$, $RS$ und $SB$ so gezogen, dass das Stück $ab$ von den Punkten $c$, $d$ und $e$ in vier gleiche Teile zerlegt wird. Wir betrachten den Linienzug $APQRSB$ als das Bild der Funktion $y = g_3(x)$.

Beweise: $a$) Die Ableitung $y' = g_3'(x)$ der Funktion $y = g_3(x)$ hat zum Bild den horizontalen oberen Rand der schraffierten Figur (mit Ausnahme von einigen Endpunkten).

$b$) $\Sigma F = f(b) - f(a)$.

Wir betrachten die Figuren 8, 9 und 10. Hierin wird die Kurve der Reihe nach approximiert von den Linienzügen *APB*, *APQB* und *APQRSB*. Demzufolge zeigt die Figur der abge-

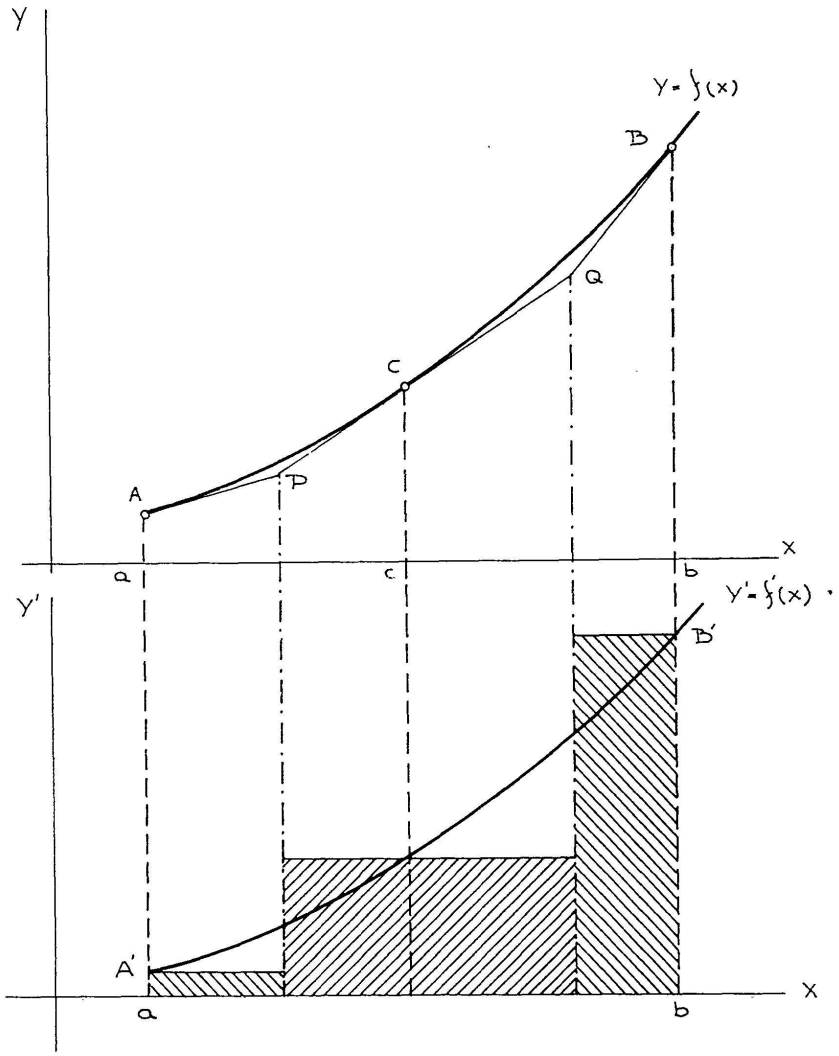


Fig. 9.

leiteten Kurve erst 2 Rechtecke, dann 3 und danach 5. Diesen Prozess können wir uns fortgesetzt denken: in Fig. 9 zerlegte der Punkt *c* das Interval *ab* in zwei gleiche Teile, wodurch 3 Rechtecke entstanden, in Fig. 10 zerlegten die Punkte *c*, *d* und *e* das Interval *ab* in 4 gleiche Teile, mit 5 Rechtecken; sodann können wir *ab* in 8 gleiche Teile zerlegen, mit 9 Rechtecken, dann in 16 Teile mit 17 Rechtecken, usw. Auf jeder Stufe der Zerlegung des Intervals *ab* gilt

$$\Sigma F = f(b) - f(a),$$

das heisst *der totale Inhalt der Rechtecke ist immer derselbe*, Dessen Limes ist aber der Inhalt $F_a^b$ der Fläche, die begrenzt wird von

der Kurve $y' = f'(x)$, den zu den Abszissen $a$ und $b$ gehörigen Ordinaten und der $x$-Achse. Also ist auch

$$F_a^b = f(b) - f(a),$$

und damit der Hauptsatz bewiesen.

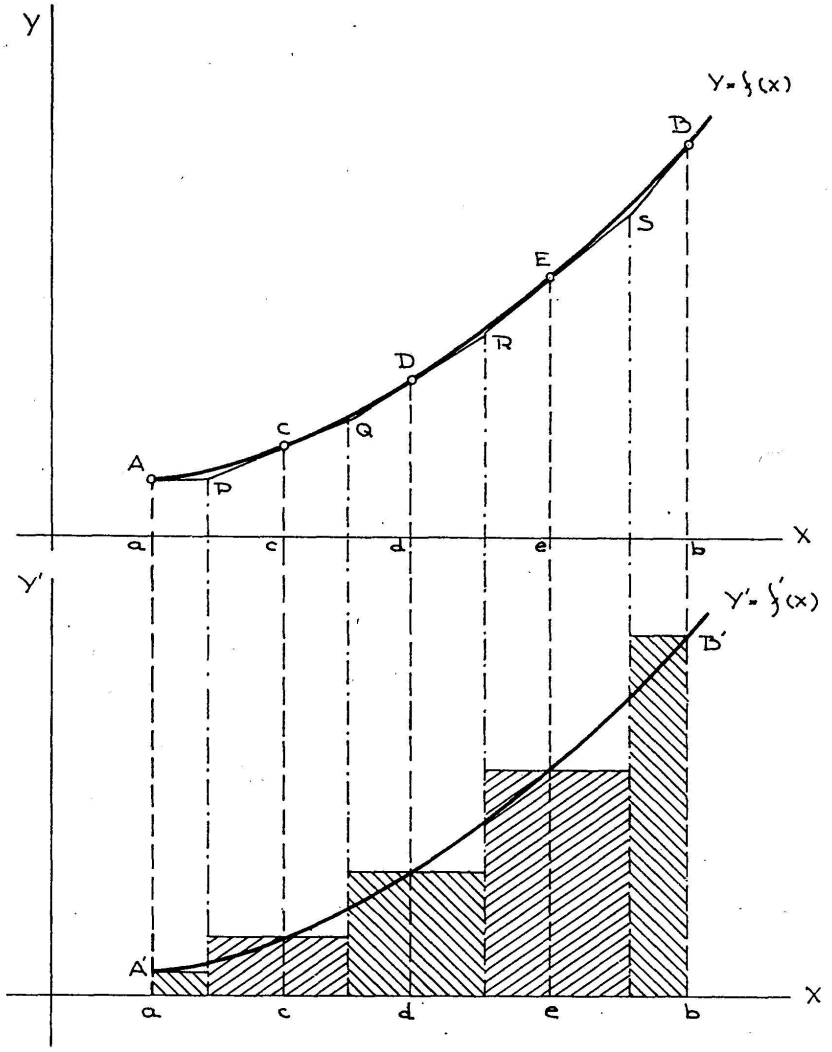


Fig. 10.

7. Dass tatsächlich die Breite unserer Rechtecke nach null strebt, zeigt sich wie folgt.

Die Tangenten die man in zwei aufeinander folgenden Punkten der Kurve $y = f(x)$ zieht, z. B. in den Punkten $C$ und $D$ von Figur 10, schneiden sich innerhalb des vertikalen Streifens, der durch $Cc$ und $Dd$ begrenzt wird. Sollte jemand dagegen Bedenken tragen, dieses als selbstverständlich anzunehmen, so kann er es wie folgt beweisen. Dabei ist es praktischer Fig. 8 (oberen Teil) zu betrachten, in welcher der Bogen $AB$ dieselbe Rolle spielt wie der Bogen $CD$ in Fig. 10.

Voraussetzungsgemäss ist längs dem Bogen $AB$ die zweite Ableitung positiv; die erste Ableitung ist also eine monoton zunehmende Funktion und kann somit in den Punkten $A$ und $B$ nicht denselben Wert annehmen. Hieraus ergibt sich, dass die Tangenten in $A$ und $B$ nicht parallel sind; es sei $P$ ihr Schnittpunkt. Da sowohl in $A$ wie in $B$ die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ existiert (und zwar von der Grösse $A'a$ und $B'b$ im unteren Teile der Figur), ist keine der Tangenten in $A$ und $B$ vertikal, so dass wir bei der Tangente in $A$ vom rechten Teil, und bei der Tangente in $B$ vom linken Teil sprechen können. Wir müssen jetzt beweisen, dass der Punkt $P$ auf diesen zwei Teilen der Tangenten liegt. Da die zweite Ableitung überall positiv ist, kehrt der Bogen $AB$ seine konvexe Seite nach unten und befindet sich (mit Ausnahme des Tangentenpunktes) oberhalb jedes seiner Tangenten. Der Bogen $AB$ liegt also, mit Ausnahme von $A$, ganz oberhalb der Tangente $AP$; insbesondere liegt $B$ oberhalb $AP$. Aber dann kann die Gerade $AP$ den rechten Teil der Tangente in $B$ nicht schneiden. Denn sonst würde der Anstieg der letzteren kleiner als derjenige der ersteren (was unmittelbar aus einfachen planimetrischen Erwägungen folgt), im Widerspruch zu dem monoton Zunehmen dieses Anstiegs. Die Gerade $AP$ schneidet also den linken Teil der Tangente in $B$. Ebenso zeigt man, dass die Gerade $BP$ den rechten Teil der Tangente in $A$ schneidet. Der Schnittpunkt $P$ befindet sich also in der Tat zwischen den Geraden $Aa$ und $Bb$.

Also wird auch in Fig. 10 der Schnittpunkt der Tangenten in $C$ und $D$ zwischen den Vertikalen $Cc$ und $Dd$ liegen, und der Schnittpunkt $R$ der Tangenten in $D$ und $E$ zwischen den Vertikalen $Dd$ und $Ee$. Also liegen die Punkte $Q$ und $R$ beide zwischen $Cc$ und $Ee$, was zur Folge hat, dass im unteren Teil der Figur die Breite des mittleren Rechtecks kleiner ist als das Interval $ce$ der $x$-Achse, also kleiner als $\frac{2}{4}$ vom Interval $ab$. Wird $ab$ in $n$ gleiche Teile zerlegt, statt in 4 Teile, dann wird die Breite jedes Rechtecks, mit einer kleinen Abänderung für das erste und das letzte Rechteck, kleiner als der $\frac{2}{n}$ Teil von $ab$. Mit zunehmenden Werten von $n$ strebt diese Breite gegen null.

8. Es ist verführerisch die Beweisführung des Paragraphen 6 zu kürzen und nach der Behandlung der Aufgabe 3 (Fig. 7) die Argumentation wie folgt fortzusetzen.

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion mit kontinuierlicher Ableitung $y' = f'(x)$, welche zwei Funktionen für das Interval $ab$ der $x$-Achse wieder in der üblichen Weise graphisch dargestellt seien. Man kann dann die Kurve $y = f(x)$ durch die Bilder der Funktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... in solcher Weise approximieren, dass jedes Exemplar dieser letzgenannten Bilder eine Tangentenkette an der Kurve $y = f(x)$ ist und dass $\lim g_n(x) = f(x)$. Zu jeder Kurve $x = g_n(x)$ denken wir uns die abgeleitete Kurve $y_n = g_n'(x)$ konstruiert, die aus einer Menge von horizontalen Liniensegmenten besteht (exklusive einer Anzahl von Endpunkten). (Wir machen keinen Gebrauch davon, dass die Kurve $y' = f'(x)$ mit den Segmenten der Kurve $y' = g_n'(x)$ Punkte gemein hat.) Betrachten wir wieder zu jeder Kurve $y' = g_n'(x)$ die zugehörigen Rechtecke mit der Inhaltssumme $\Sigma_n$, dann gilt für jedes $n$:

$$\Sigma_n = g_n(b) - g_n(a) = f(b) - f(a).$$

Lässt man $n$ unbeschränkt zunehmen, dann strebt die Funktion $y = g_n(x)$ nach der Funktion $y = f(x)$. Dann wird auch die Ableitung $y_n = g_n'(x)$ der ersteren nach der Ableitung $y' = f'(x)$ der zweiten streben. Aber dann approximiert auch die Inhaltssumme $\Sigma_n$ unbeschränkt den Flächeninhalt $F_a^b$. Und da $\Sigma_n$ konstant und gleich $f(b) - f(a)$ ist, ergibt sich:

$$F_a^b = \lim_{n \to \infty} \Sigma_n = f(b) - f(a).$$

Hiermit wäre der vorher erwähnte Beweis in der Tat gekürzt. Jedoch, auch bei einer genaueren Formulierung als der hier gegebenen, kann diese Beweisführung nicht als befriedigend betrachtet werden. Dass die Funktion $y = g_n(x)$ nach der Funktion $y = f(x)$ strebt, kann man wohl an der Figur ablesen; ebenfalls, dass die Fläche $\Sigma_n$ die Fläche $F_a^b$ zum Limes hat. Aus

$$y = g_n(x) \to y = f(x)$$

folgt aber nicht

$$y' = g_n'(x) \to y' = f'(x).$$

Um dies einzusehen, betrachte man z. B. die Funktion $y = \sin x$ mit ihrer Ableitung $y' = \cos x$. Man kann die Bildkurve der ersteren homothetisch verkleinern und dadurch die $x$-Achse approximieren lassen (d. h. mittels der Funktionen

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx).$$

Die abgeleitete Kurve wird dann aber nicht die abgeleitete Kurve $y' = f'(x) \equiv 0$ approximieren, denn die Ableitung ($g_n'(x) = \cos nx$) bleibt immer dieselbe Skala von Funktionswerten bestreichen.

Wir wollen auf diese Frage nicht weiter eingehen, sondern nur den folgenden Satz beiläufig erwähnen: wird die Funktion $f(x)$ approximiert von der Funktion $g_n(x)$, und wird eine Funktion $h(x)$ gleichmässig approximiert von der Ableitung $g_n'(x)$, dann ist $h(x)$ die Ableitung von $f(x)$. (Der genannte Satz erwähnt eine Bedingung die hinreichend, aber nicht notwendig ist.)

Es ist also nicht erlaubt den angegebenen Beweis in dieser Weise zu kürzen.

Universitat Utrecht
Nederland.