Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS A CONNEXION LINÉAIRE ET DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Autor: Lichnerowicz, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37948

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS A CONNEXION LINÉAIRE ET DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES[1]

par André LICHNEROWICZ

1. *Dans cette conférence d'exposition, je me propose d'indiquer les principaux résultats obtenus dans une période récente et concernant les transformations affines d'une variété à connexion linéaire, ou plus particulièrement d'une variété riemannienne.*

La variété sera parfois supposée *complète* pour la connexion: nous entendons par là que tout arc géodésique peut être prolongé à des valeurs arbitrairement grandes (en module) du paramètre affine. Dans le cas d'une variété riemannienne, cette condition équivaut à la suivante: l'espace métrique défini sur la variété par la métrique riemannienne est *complet* (théorème de Hopf-Rinow). En particulier toute variété riemannienne compacte est complète.

Les transformations affines envisagées présentent avec l'holonomie de la variété des relations que nous analyserons. Rappelons que le groupe d'holonomie Ψ_x de la connexion en un point x est le groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel tangent défini par le transport (parallèle) le long de tous les lacets en x. Aux lacets homotopes à zéro correspond le plus grand sous-groupe connexe Ψ_x^0 de Ψ_x — ou groupe d'holonomie *connexe*. Ce groupe de Lie est, dans le cas d'une variété riemannienne, un groupe compact. L'étude du cas important des espaces homogènes à connexion linéaire invariante s'introduira d'elle-même.

Dans une première partie, nous étudions une notion intéressante élaborée par Kostant dans le cas des variétés riemanniennes et qui s'étend sans grandes difficultés au cas des variétés à connexion linéaire: le groupe de Kostant. Une seconde partie est relative aux transformations affines et isométries d'une variété riemannienne complète. Enfin une troisième partie est

---

[1]) Conférence prononcée au Colloque sur la géométrie différentielle et la topologie, Zürich, juin 1960.

consacrée à l'étude géométrique d'espaces homogènes particulièrement importants. Les différents résultats présentés sont dus principalement à Kobayashi, Kostant, Nomizu, Wang, Yano et à l'auteur de cette conférence.

I. Le groupe de Kostant.

2. *Transformations infinitésimales affines.*

a) Soit V_m une variété différentiable [1]) de dimension m, *munie d'une connexion linéaire.* Cette connexion est définie par sa forme ω, 1-forme sur l'espace fibré principal $E(V_m)$ des repères de V_m et à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. A la 2-forme de torsion Σ de type vectoriel de la connexion correspond canoniquement une 1-forme $\lambda(\Sigma)$ de type adjointe à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. Désignons par $\overline{\omega}$ la *connexion associée* à ω définie par [2]):

$$\overline{\omega} = \omega + \lambda(\Sigma)$$

et par ∇ et $\overline{\nabla}$ les opérateurs de différentiation absolue par rapport aux connexions ω et $\overline{\omega}$. A tout champ de vecteurs X, nous faisons correspondre le champ de tenseurs A_X de type (1, 1) défini par la 1-forme de type vectoriel $-\overline{\nabla} X$. En chaque point x de V_m, $A_X(x)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_m. Le champ A_X intervient dans l'expression de l'opérateur de transformation infinitésimale $\mathscr{L}(X)$ en termes de dérivée covariante. En particulier, si t est un tenseur de type (1, 1):

$$\mathscr{L}(X)\, t = i(X)\, \nabla t + [A_X, t] \tag{2-1}$$

où $i(X)$ est l'opérateur de produit intérieur par X sur une forme et où le crochet est entendu au sens du crochet des endomorphismes.

b) Un champ de vecteurs X définit une *transformation infinitésimale* (t.i.) *affine* si cette t.i. laisse ω invariante, c'est-à-dire si

$$\mathscr{L}(X)\, \omega = 0 \tag{2-2}$$

---

1) Dans cette conférence, tous les éléments introduits sont supposés indéfiniment différentiables.

2 Pour une connexion sans torsion, $\overline{\omega}$ coïncide avec ω.

où $\mathscr{L}(X)$ a été étendu à $E(V_m)$; (2-2) peut être traduite par:

$$i(Y)\nabla A_X = \Omega(X, Y) \tag{2-3}$$

où Ω est la forme de courbure de la connexion et Y un vecteur arbitraire. De (2-3) il résulte que deux t.i. affines pour lesquelles X et A_X ont mêmes valeurs en un point coïncident sur V_m. Ainsi les t.i. affines définissent par le crochet usuel $[X, Y] = \mathscr{L}(X)Y$, une algèbre de Lie *de dimension finie.*

c) Une *transformation affine* est une transformation μ de V_m laissant invariante la connexion ω. Si μ' est l'application linéaire tangente définie par μ et $\tau(l)$ le *transport* au sens de la connexion le long d'un chemin l de V_m joignant x à x', on a alors l'égalité:

$$\mu' \circ \tau(l) = \tau(\mu l) \circ \mu' \tag{2-4}$$

entre applications linéaires de T_x sur $T_{\mu x'}$.

On sait que le groupe $A(V_m)$ de toutes les transformations affines de V_m admet une structure naturelle de *groupe de Lie* (Nomizu ou corollaire d'un théorème plus général d'Ehresmann). Nous désignons par $A^0(V_m)$ le plus grand sous-groupe connexe de $A(V_m)$. Si V_m est *complète* pour la connexion ω, toute t.i. affine définit un groupe à un paramètre de transformations affines globales de V_m.

3. *Interprétation de A_X.*

Etant donné un champ de vecteurs X, désignons par $x(t) = \exp(tX)\,x_0$ pour t suffisamment petit, la solution de $dx/dt = X(x)$ telle que $x(0) = x_0$. Pour $0 \leqslant t \leqslant u$ (u suffisamment petit), $x(t)$ engendre un chemin l_u issu de x_0.

Pour X définissant une t.i. *affine*, A_X admet une interprétation géométrique simple: considérons les automorphismes de T_{x_0} définis, pour u variable, par $\exp(-uX)'\,\tau(l_u)$. Ces automorphismes appartiennent à un groupe à un paramètre d'automorphismes de T_{x_0} et l'on a:

$$\exp[u\,A_X(x_0)] = \exp(-uX)'\,\tau(l_u)\,. \tag{3-1}$$

4. *Le groupe de Kostant.*

a) Soit X et Y deux t.i. *affines.* De l'invariance de ϖ par Y résulte:

$$A_{[Y,X]} = \mathscr{L}(Y) A_X$$

De (2-1) et (2-3) il vient:

$$A_{[Y,X]} = i(Y) \nabla A_X + [A_Y, A_X] = \Omega(X, Y) + [A_Y, A_X] .$$

On obtient ainsi la relation simple:

$$\Omega(X, Y) = [A_X, A_Y] - A_{[X,Y]} ; \tag{4-1}$$

b) Soit L une algèbre de Lie de t.i. affines de V_m. Pour $X \in L$, les endomorphismes $A_X(x)$ de T_x engendrent une algèbre de Lie $\underline{K}_x(L)$ d'endomorphismes qui est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $K_x(L)$ d'automorphismes de T_x; $K_x(L)$ sera dit le *groupe de Kostant* en x de l'algèbre L [1]). Il a été un peu généralisé par Wang.

Soit $\underline{\Psi}'_x$ l'algèbre d'*holonomie infinitésimale*: c'est l'algèbre engendrée, en tant qu'espace vectoriel, par les endomorphismes de T_x déduits des dérivées covariantes successives du tenseur de courbure. D'après (2-1), le groupe de Kostant est sous-groupe du normalisateur connexe $N^0(\Psi'_x)$ du groupe d'holonomie infinitésimale dans le groupe de tous les automorphismes de T_x.

Supposons l'algèbre L *transitive*: le sous-espace de T_x engendré par les $X(x)$ $(X \in L)$ coïncide avec T_x. Dans ce cas Ψ'_x coïncide avec le *groupe d'holonomie connexe* Ψ^0_x. De (4-1), il résulte que les éléments de l'algèbre d'holonomie engendrés par le tenseur de courbure lui-même sont dans $\underline{K}_x(L)$ et, par récurrence sur l'ordre des dérivations du tenseur de courbure, on déduit de (2-1) qu'il en est de même pour tous les éléments de l'algèbre d'holonomie. *Ainsi si* L *est transitive:*

$$\Psi^0_x \subset K_x(L) \subset N^0(\Psi^0_x) . \tag{4-2}$$

5. *Espace homogène à connexion linéaire invariante.*

Soit $V_m = G/H$ (G *effectif*) un espace homogène *muni d'une connexion linéaire invariante.* Dans ce cas le groupe linéaire d'iso-

---

1) Ce groupe a été introduit par Kostant [1] dans le cas des variétés riemanniennes et des algèbres d'isométries infinitésimales.

tropie $\tilde{H}$ est isomorphe à H. A chaque élément g de G correspond une transformation affine μ_g de V_m. Le groupe G définit sur V_m une algèbre transitive L de t.i. affines; nous désignons par $K_x(G)$ le groupe de Kostant correspondant à L:

$$\Psi_x^0 \subset K_x(G) \subset N^0(\Psi_x^0) . \tag{5-1}$$

Si $X \in L$, μ_g' transforme le tenseur $A_X(x)$ en le tenseur $A_{\mu' g X}(gx)$. Par suite, *chaque élément* g *de* G *établit un isomorphisme de* K_x (G) *sur* K_{gx} (G) (isomorphisme qui applique Ψ_x^0 sur Ψ_{gx}^0). En particulier

$$\tilde{H}_x \subset N[K_x(G)] \qquad (\tilde{H}_x^0 \subset K_x(G)) \tag{5-2}$$

où N désigne le normalisateur dans le groupe des automorphismes de T_x.

On peut obtenir pour $K_x(G)$ un résultat analogue en ce qui concerne le transport. En considérant, dans chaque classe d'homotopie de lacets en x, un lacet composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de G et en évaluant le transport le long de chacun de ces arcs au moyen de la formule (3-1), on établit d'abord, grâce à (3-1),

$$\Psi_x \subset N[K_x(G)] . \tag{5-3}$$

On voit de même que le transport le long d'un chemin $l(x, x')$ composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de G établit un isomorphisme entre $K_x(G)$ et $K_{x'}(G)$. Il résulte de (5-3) que *le transport le long d'un chemin arbitraire reliant* x *à* x′ *établit un isomorphisme entre* K_x (G) *et* $K_{x'}$ (G).

Il existe, comme nous le verrons, des cas nombreux où:

$$\Psi_x^0 = K_x(G) .$$

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que sur l'espace homogène $V_m = G/H$, *la connexion linéaire invariante est à holonomie normale.*

6. *Tenseurs invariants.*

Si un tenseur t est invariant par transport, $t(x)$ est invariant par le groupe d'holonomie Ψ_x. De la formule (3-1) et de l'étude précédente, il résulte:

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène* $V_m = G/H$ (G *effectif*) *à connexion linéaire invariante, si un tenseur* t *satisfait deux des trois conditions suivantes, il satisfait la troisième.*

a) t *est invariant par l'action de* G*;*

b) t *est invariant par transport;*

c) t (x) *est invariant par le groupe de Kostant* $K_x(G)$ *en un point* x *de* V_m.

Au champ t on peut substituer un champ Q de sous-espaces vectoriels. Si la connexion est *à holonomie normale*, b entraîne c, donc a: Tout tenseur invariant par transport est invariant par G.

II. TRANSFORMATIONS AFFINES ET ISOMÉTRIES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

7. *Transformations affines et réductibilité.*

Soit V_m une variété *riemannienne* de tenseur métrique g, que nous considérons toujours comme munie de sa *connexion riemannienne.* Toute isométrie ou *similitude* ($\mu^* g = c^2 g$; $c =$ const.) est une transformation affine pour cette connexion. Inversement, dans l'hypothèse où *le groupe d'holonomie est irréductible, toute transformation affine* reproduit la métrique à un facteur nécessairement constant près, et par suite *est une similitude.* En utilisant cette remarque, nous nous proposons d'étudier les rapports généraux entre transformations affines et isométries.

a) La variété V_m est dite réductible si *son groupe d'holonomie connexe* Ψ_x^0 *est réductible dans le réel.* S'il en est ainsi, l'espace vectoriel T_x peut être décomposé, d'une manière et d'une seule à l'ordre près, en somme directe de sous-espaces orthogonaux T_x^a ($a = 0, 1, \ldots k$), invariants par Ψ_x^0, tels que Ψ_x^0 induise l'identité sur T_x^0 et des représentations irréductibles sur

T_x^a $(a \neq 0)$. Cette décomposition est la *décomposition canonique* relative à la réductibilité. Il lui correspond une décomposition de Ψ_x^0 en produit direct $\Pi\Psi_{(b)x}$ $(b = 1, \ldots k)$, où $\Psi_{(b)x}$ induit sur T_x^a $(a \neq b)$ la représentation triviale (Borel-Lichnerowicz); Ψ_x^0 étant sous-groupe invariant de Ψ_x, le sous-espace T_x^0 est aussi invariant par Ψ_x; par transport de T_x^0 on obtient sur V_m le champ complètement intégrable T^0 et un feuilletage de V_m en feuilles localement euclidiennes. Si $T_x^0 = 0$, nous dirons brièvement que V_m est *sans partie euclidienne.*

b) Soit μ une transformation affine de V_m, S l'ensemble des sous-espaces de T_x invariants par Ψ_x. Si l est un chemin joignant x à $\mu^{-1}(x)$ l'automorphisme de T_x défini par:

$$\mu \circ \tau(l)$$

détermine une substitution $s(\mu)$ de S ne dépendant que de μ. On obtient ainsi un *homomorphisme* de $A(V_m)$, dans le groupe des substitutions de S. Si Ψ_x induit sur un élément $U_x \in S$ une représentation irréductible (resp. l'identité), il en est de même pour $s(\mu)\, U_x$.

c) Supposons V_m *simplement connexe.* La décomposition canonique définit alors $(k + 1)$ champs T^a de sous-espaces, invariants par transport le long d'un chemin arbitraire. Par suite si $\mu \in A(V_m)$, μ laisse invariant T^0 et permute éventuellement les T^a $(a \neq 0)$. Si $\mu \in A^0(V_m)$, tous les T^a sont invariants. Ainsi:

THÉORÈME. — *Sur une variété riemannienne simplement connexe, chaque champ* T^a *défini par la décomposition canonique relative à la réductibilité est invariant par toute transformation affine de* $\mathrm{A}^0(\mathrm{V}_m)$.

8. *Etude des variétés riemanniennes complètes.*

Sur V_m, la distance $d(x, x')$ définie par le minimum de la longueur des chemins continûment différentiables par morceaux joignant x à x' détermine une structure d'espace métrique. Nous supposons V_m *complète*, c'est-à-dire complet l'espace métrique précédent

a) Soit μ une *similitude* qui ne soit pas une isométrie; en passant au besoin à l'inverse, on peut supposer $\mu^* g = c^2 g$ avec

$c < 1$. Par suite, μ réduit les longueurs et distances dans le rapport c. Du caractère complet, il résulte que μ admet un point fixe x_0. Si l est un lacet arbitraire en x_0 et si r_h est l'élément du groupe d'holonomie induit par le lacet $\mu^h\, l$ ($h = 0, 1, \ldots$), r_h tend vers l'identité quand $h \to \infty$. D'après (2-4), $r_h = \mu'^h \circ r_0 \circ \mu'^{-h}$ et le polynôme caractéristique de r_h est indépendant de h et coïncide avec celui de l'identité. On peut en déduire que le groupe d'holonomie de V_m est réduit à l'identité.

THÉORÈME. — *Sur une variété riemannienne complète qui n'est pas localement euclidienne, toute similitude est une isométrie* [Kobayashi].

Si V_m complète est *irréductible* ($m \geqslant 2$) *toute transformation affine est une isométrie.*

b) Supposons V_m *complète et simplement connexe.* D'après un théorème classique de Georges de Rham, il existe une isométrie globale de V_m sur le produit riemannien de $(k+1)$ variétés W^a complètes simplement connexes. Pour $a = 0$, W^0 est euclidienne et pour $a \neq 0$, W^a est irréductible (de dimension $\geqslant 2$).

Soit $I^0(V_m)$ le plus grand groupe connexe d'isométries de V_m. A l'aide du théorème du § 7, on établit que $A^0(V_m)$ (resp. $I^0(V_m)$) peut être identifié au produit direct $\Pi A^0(W^a)$ (resp. $\Pi\, I^0(W^a)$). Du résultat précédent on déduit que $A^0(W^a) = I^0(W^a)$ pour $a \neq 0$. Ainsi:

THÉORÈME. — *Pour une variété riemannienne complète, simplement connexe,* $\mathrm{V}_m = \mathrm{W}^0 \times \mathrm{W}$ *où* W^0 *est euclidienne et* W *sans partie euclidienne,* $\mathrm{A}^0(\mathrm{V}_m)$ *est identique au produit direct* $\mathrm{A}^0(\mathrm{W}^0) \times \mathrm{I}^0(\mathrm{W})$ *agissant naturellement sur* V_m.

Les transformations strictement affines de $A^0(V_m)$ proviennent ainsi des transformations strictement affines de l'espace euclidien. Par étude du revêtement universel, on voit que *pour toute variété riemannienne complète* (sans hypothèse de simple connexité) *sans partie euclidienne* $\mathrm{A}^0(\mathrm{V}_m) = \mathrm{I}^0(\mathrm{V}_m)$. Une étude directe montre qu'on a la même conclusion pour toute variété riemannienne *compacte* (avec ou sans partie euclidienne) [Kenkaro Yano].

9. *Holonomie et isométries infinitésimales sur une variété riemannienne.*

a) Pour une variété riemannienne, les endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien T_x peuvent être identifiés à des 2-formes. Ainsi l'algèbre d'holonomie $\underline{\Psi}_x$ en x définit un sous-espace (désigné par la même notation) de l'espace vectoriel des 2-formes en x. Soit B_x l'orthocomplément de ce sous-espace par rapport au produit scalaire, noté (,), défini sur les 2-formes par la métrique. Si Y est un champ de vecteurs sur un voisinage U de la variété V_m, α une 2-forme sur U telle que $\alpha(x) \in \underline{\Psi}_x$ pour $x \in U$, on sait que:

$$(9\text{-}1) \qquad (i(Y)\nabla\alpha)(x) \in \underline{\Psi}_x$$

De même si β est une 2-forme sur U telle que $\beta(x) \in B_x$ pour $x \in U$

$$(9\text{-}2) \qquad (i(Y)\nabla\beta)(x) \in B_x$$

Cela posé si X est une *isométrie infinitésimale*, $A_X(x)$ définit une 2-forme en x. Avec un abus de notation, nous pouvons poser

$$(9\text{-}3) \qquad A_X = \alpha + \beta \qquad (\text{avec } \alpha(x) \in \underline{\Psi}_x\,,\ \beta(x) \in B_x)\,.$$

D'après (2-3), $(i(Y)\nabla A_X)(x) \in \underline{\Psi}_x$. De (9-1) et (9-2) il résulte $\nabla\beta = 0$ et $\beta(x)$ est dans l'algèbre de Lie du centralisateur connexe de Ψ_x^0 dans le groupe des rotations de T_x.

Si V_m est à Ψ_x^0 irréductible et admet une 2-forme à dérivée covariante nulle, elle est *kählerienne* ($m = 2n$). Dans ce cas, si la courbure de Ricci de la variété est non nulle, le centralisateur connexe de Ψ_x^0 est contenu dans Ψ_x^0 et l'on voit que $A_X(x) \in \underline{\Psi}_x$. On déduit de ces remarques.

THÉORÈME. — *Un espace homogène riemannien* $V_m = G/H$ *est certainement à holonomie normale* ($\Psi_x^0 = K_x(G)$) *sous l'une des hypothèses suivantes :*

a) *Si* V_m *n'admet pas de 2-formes à dérivée covariante nulle, en particulier si* V_m *irréductible n'est pas kählerien ;*

b) *Si* V_m *est kählerien, à* Ψ_x^0 *irréductible est à courbure de Ricci non nulle ;*

c) *Si* V_m *admet une courbure de Ricci non dégénérée.*

c se déduit de *a* et *b* à l'aide du théorème de réductibilité de G. de Rham.

b) De ce même théorème et du § 8, on déduit que si V_m est une variété riemannienne *complète*, $I^0(V_m)$ son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif), le groupe $K(I^0(V_m))$ est produit direct de groupes orthogonaux connexes irréductibles et d'un groupe certainement compact correspondant à la partie euclidienne.

THÉORÈME. — *Pour toute variété riemannienne complète,* $K_x(I^0(V_m))$ *est compact.*

c) Supposons V_m *compacte.* On sait que $I^0(V_m)$ est alors compact (Elie Cartan). Si X est une isométrie infinitésimale, considérons la décomposition (9-3) et la 1-forme

$$\eta = i(X)\beta$$

De (9-3) on déduit:

$$\delta\eta(x) = (A_X(x), \beta(x)) = (\beta(x), \beta(x)) \geqq 0$$

où δ est l'opérateur de codifférentiation. Si V_m est compacte orientable, on en déduit par intégration $\beta = 0$ et, par passage à un revêtement, il en est de même si V_m est seulement compacte. Ainsi $K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0$.

Soit J_{x_0} le sous-groupe d'*isotropie* d'un point x_0, c'est-à-dire le sous-groupe de $I^0(V_m)$ laissant x_0 fixe, h un élément de J_{x_0}. Le groupe $I^0(V_m)$ étant compact, il existe un sous-groupe à un paramètre $\exp(tX)$ tel que $h = \exp(uX)$; $x(t) = \exp(tX)$ $(0 \leqslant t \leqslant u)$ engendre un lacet l en x_0. Si r est l'élément de Ψ_{x_0} correspondant à l, on a d'après (3-1)

$$\exp(uX)' = r \cdot \exp[-uA_X(x_0)] .$$

Ainsi, si $\tilde{J}_{x_0}$ est le groupe linéaire d'isotropie, $\tilde{J}_{x_0} \subset \Psi_{x_0}$. Nous énoncerons:

THÉORÈME. — *Si* V_m *est une variété riemannienne compacte,* $I^0(V_m)$ *son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif),* J_x *le sous-groupe d'isotropie en* x, *on a*

$$K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0 \tag{9-4}$$

et

$$\tilde{J}_x \subset \Psi_x \,. \tag{9-5}$$

En particulier pour tout espace homogène riemannien compact, l'holonomie est normale.

III. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS. CAS RIEMANNIEN.

10. *Notion d'espace homogène réductif* (Nomizu].

Sur un espace homogène $V_m = G/H$ une *structure réductive* (ou d'espace homogène réductif) est définie par la donnée d'une *décomposition en somme directe de l'algèbre de Lie* $\underline{G}$ *de* G

$$\underline{G} = \underline{H} + M \qquad (\underline{H} \cap M = 0) \tag{10-1}$$

telle que le sous-espace M *vérifie*

$$adj\,(H)\,M \subset M\,, \tag{10-2}$$

adj (H) est ici la restriction à H de la représentation adjointe de G. Tout élément λ de $\underline{G}$ s'écrit d'une manière et d'une seule $\lambda = \lambda_{\underline{H}} + \lambda_M$ ($\lambda_{\underline{H}} \in \underline{H}$; $\lambda_M \in M$). Par la projection naturelle p de G sur V_m, on peut identifier M avec l'espace vectoriel Tx_0 tangent en $x_0 = pe$ à V_m et adj (H) avec le groupe linéaire d'isotropie $\tilde{H}$. Les cas où H est compact ou connexe réductif dans G fournissent des exemples de structure réductive.

D'après (10-2), M définit sur l'espace fibré principal G de base V_m une connexion infinitésimale invariante par G. Si $P(V_m)$ est l'espace de repères défini par les repères de V_m déduits de l'un d'entre eux par l'action de G, le fibré $P(V_m)$ est isomorphe au fibré G. De la connexion invariante obtenue sur

$P(V_m)$, on déduit une connexion linéaire invariante pour $V_m = G/H$. Cette connexion ω est dite la *connexion canonique* de la structure.

A tout élément λ de $\underline{G}$ correspond un sous-groupe à un paramètre noté $\exp[sX(\lambda)]$ où $X(\lambda)$ est la t.i. correspondante. Si $\lambda \in M$, le transport le long de $x(s) = \exp[sX(\lambda)]\, x_0$ relativement à ω coïncide avec l'action correspondante de $\exp[sX(\lambda)]$; $x(s)$ est ainsi une géodésique de ω rapportée à un paramètre affine. L'espace homogène réductif $V_m = G/H$ est *complet* pour sa connexion canonique.

Sans entrer dans le détail de la théorie, je me bornerai à indiquer des résultats liés à la considération du groupe de Kostant. On voit sur (3-1) que pour $\lambda \in M$

$$A_{X(\lambda)}(x_0) = 0 .$$

Le groupe de Kostant relatif à ω ne provient que des éléments de $\underline{H}$ et si $\tilde{H}^0$ est le groupe linéaire connexe d'isotropie en x_0:

$$K_{x_0}(G) = \tilde{H}^0 \tag{10-3}$$

Ainsi, d'après le § 6, *tout tenseur invariant par* G *est invariant par transport relativement à* ω. En particulier les tenseurs de courbure et de torsion de la connexion canonique sont à dérivée covariante nulle. Les espaces homogènes réductifs constituent une généralisation naturelle des espaces homogènes symétriques d'Elie Cartan.

11. *Connexion de Cartan d'un espace réductif.*

A partir de la connexion canonique, les connexions linéaires invariantes de l'espace correspondent biunivoquement aux tenseurs invariants de type (1, 2). Il existe une connexion invariante et une seule sans torsion telle que les géodésiques issues de x_0 et rapportées à un paramètre affine coïncident avec celles de la connexion canonique. J'appelle cette connexion la *connexion de Cartan* de l'espace; celui-ci est toujours *complet* pour sa connexion de Cartan.

Si $\lambda \in \underline{G}$, l'endomorphisme $A_{X(\lambda)}(x_0)$ relatif à la connexion de Cartan est tel que:

$$11\text{-}1) \qquad A_{X(\lambda)}(x_0) \cdot p\mu = -p\left(\frac{1}{2}[\lambda_M, \mu]_M + [\lambda_{\underline{H}}, \mu]\right) (\mu \in M) .$$

Considérons les endomorphismes B_λ de M définis par:

$$(11\text{-}2) \qquad B_\lambda \mu = [\lambda, \mu]_M \qquad (\lambda \in \underline{G}, \mu \in M) .$$

Le groupe de Kostant K_{x_0} (G) *relatif à la connexion de Cartan peut être identifié par* p *avec le groupe connexe* K (G) *d'automorphismes de* M *admettant pour algèbre de Lie l'algèbre d'endomorphismes engendrée par les* B_λ.

12. *Espace homogène riemannien naturellement réductif.*

Soit $V_m = G/H$ (G effectif) un espace homogène muni

1° d'une métrique riemannienne invariante ds^2;

2° d'une structure réductive $\underline{G} = \underline{H} + M$

telles que la connexion riemannienne de la métrique coïncide avec la connexion de Cartan de la structure réductive. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le tenseur métrique soit invariant par transport relativement à la connexion de Cartan, c'est-à-dire que la forme quadratique correspondante sur M soit invariante par le groupe $K(G)$. Nous dirons que G/H est muni d'une structure d'*espace homogène riemannien naturellement réductif*. Si H est compact ou connexe, pour qu'à une structure réductive corresponde une structure d'espace homogène riemannien naturellement réductif, il suffit que $K(G)$ soit *compact*.

Soit l_1 un lacet en $x_0 = pe$. La variété riemannienne V_m étant complète, il existe sur son revêtement universel une géodésique joignant deux points arbitraires. Par suite, par projection, il existe sur V_m un lacet l_2 en x_0, homotope à l_1 et qui est un arc géodésique de la connexion de Cartan de la structure réductive; un tel arc peut être défini par

$$x(t) = \exp[tX(\lambda)]\, x_0 \qquad (\lambda \in M)$$

avec $0 \leqslant t \leqslant u$ et pour $t = u$, $\exp[uX(\lambda)] \in H$.

Soit ω *une connexion linéaire invariante arbitraire* et étudions son holonomie. Si r_1 (resp r_2) est l'élément de son groupe d'holo-

nomie Ψ_{x_0} obtenu par transport le long de l_1 (resp. l_2), on a:

$$r_1 \in r_2 \, \Psi^0_{x_0} \, .$$

Mais d'après (3-1)

$$r_2 = \exp (uX)' \exp \left[u A_{X(\lambda)} (x_0) \right] \in \tilde{H} \cdot K_{x_0} (G)$$

où $K_{x_0}(G)$ est le groupe de Kostant relatif à ω. Comme $\Psi^0_{x_0} \subset K_{x_0}(G)$, on voit que *pour toute connexion invariante sur un tel espace*

$$\Psi_{x_0} \subset \tilde{H} \cdot K_{x_0} (G) \, . \tag{12-1}$$

13. *Cas où* G *est compact.*

Soit $V_m = G/H$ un espace homogène où G effectif est *compact.* Un tel espace admet certainement une structure d'espace homogène riemannien naturellement réductif. En effet, soit M l'orthocomplément de $\underline{H}$ dans $\underline{G}$ par rapport au produit scalaire défini par une forme quadratique définie positive de $\underline{G}$ invariante par G. D'après l'invariance de ce produit scalaire

$$[\lambda, \mu] \cdot \nu + \mu \cdot [\lambda, \nu] = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu \in \underline{G}) \, .$$

En particulier si $\mu, \nu \in M$

$$[\lambda, \mu]_M \cdot \nu + \mu \cdot [\lambda, \nu]_M = 0 \qquad (\lambda \in \underline{G}; \mu, \nu \in M)$$

et le produit scalaire $\mu \, . \, \nu$ de M est invariant par le groupe $K(G)$ correspondant à la structure réductive $\underline{G} = \underline{H} + M$.

Considérons sur l'espace $V_m = G/H$ à G compacte une métrique riemannienne invariante arbitraire. L'holonomie est normale: pour la connexion riemannienne correspondante

$$\Psi^0_{x_0} = K_{x_0} (G) \, . \tag{13-1}$$

D'autre part, d'après (9-5):

$$\tilde{H} \subset \Psi_{x_0} \, .$$

De (12-1) on déduit que pour toute métrique invariante $\Psi_{x_0} = \tilde{H} \, . \, K_{x_0}(G)$, soit:

$$\Psi_{x_0} = \tilde{H} \cdot \Psi^0_{x_0} \, . \tag{13-2}$$

BIBLIOGRAPHIE

BOREL, A. et A. LICHNEROWICZ, Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 234 (1952), pp. 1835-1838.

ISHIHARA, S. et M. OBATA, Affine transformations in a riemannian manifold. *Tohoku Math. J.*, 7 (1955), pp. 146-150.

KOBAYASHI, A theorem on the affine transformations group of a riemannian manifold. *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), pp. 39-41.

KOSTANT, B., Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a riemannian manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), pp. 528-542.

—— Notes aux *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, 42 (1956) pp. 258-261 et 354-357.

—— Holonomy and Homogeneous spaces. *Nagoya Math. J.* 12 (1957), pp. 31-54.

LICHNEROWICZ, A., Groupes d'holonomie. *Proc. of the Int. congress. of Math., Amsterdam* (1954).

—— Sur les transformations affines des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 242 (1956), pp. 1568-1570.

—— Transformations affines et holonomie. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 244 (1957), pp. 1868-1870.

—— Homogenous spaces and differential geometry. *Notes mim. Princeton* (janv. 1957).

—— Géométrie des groupes de transformation. *Dunod, Paris*, 1958.

MYERS et STEENROD, The group of isometries of a riemannian manifold. *Ann. of Math.*, 40 (1939), pp. 400-416.

NOMIZU, Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Math. J.*, 76 (1954), pp. 33-65.

—— On the group of affine transformations of an affinely connected manifold. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), pp. 816-823.

—— Lie groups and differential geometry. *Math. Soc. of Japan* (1956).

DE RHAM, G., Sur la réductibilité d'un espace de Riemann. *Comm. Math. Helv.*, 26 (1952), pp. 328-344.

WANG, H. C., Invariant connections over a principal fibre bundle. *Nagoya Math. J.*, 13 (1958), pp. 1-19.

YANO, Kentaro, On Harmonic and Killing vector fields. *Ann. of Math.*, 55 (1952), pp. 328-347.

Collège de France.
Paris.