# REGELMÄSSIGE VIELECKE UND IHRE DIAGONALEN

Autor(en): **Heineken, Hermann**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37967

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# REGELMÄSSIGE VIELECKE UND IHRE DIAGONALEN

von Hermann HEINEKEN

*(Reçu le 1er février 1962.)*

Wir wollen uns mit folgendem Problem befassen: *Für welche Zahl* n *kann ein regelmäßiges Vieleck mit* n *Ecken drei Diagonalen haben, die durch einen Punkt gehen?*

Dabei wollen wir uns nur Schnittpunkte ansehen, die nicht Eckpunkte des Vielecks sind. Ausserdem sollen die Schnittpunkte erreichbar sein, drei parallele Diagonalen werden also nicht als drei Diagonalen, die durch einen Punkt gehen, anerkannt. Ohne diese Einschränkungen müßte $n$ größer als drei sein, ohne die zweite Einschränkung allein wäre jede Zahl $n$ größer als sieben richtig.

Wenn man diese beiden Einschränkungen einführt, so findet man für jede gerade Zahl $n$, die grösser als vier ist, drei oder mehr Diagonalen durch den Mittelpunkt des Vielecks. Ob sich für jedes andere $n$ nur je zwei Diagonalen in einem Schnittpunkt treffen, wollen wir im weiteren feststellen. Dabei werden wir uns algebraischer Möglichkeiten bedienen. Ich danke Herrn Professor H. Steinhaus für den Hinweis auf dieses Problem, das er in [1] veröffentlicht hat.

Nehmen wir also an, dass $n$ ungerade und größer als sechs ist. Das regelmäßige Vieleck mit $n$ Ecken werden wir $V_n$ nennen. Wir können ein Koordinatensystem mit rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$ so einführen, daß eine Ecke von $V_n$ auf der positiven Hälfte der $x$-Achse liegt und der Mittelpunkt des $V_n$ umschreibenden Kreises mit dem Ursprung des Koordinatensystems übereinstimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiter annehmen, daß der $V_n$ umschreibende Kreis ein Einheitskreis ist. Dann hat die Ecke auf der $x$-Achse die Koordinaten (1, 0). Wir werden nun in der üblichen Weise die Punkte der Ebene mit den komplexen Zahlen koppeln, indem wir durch

eine komplexe Zahl genau den Punkt beschreiben lassen, der den Realteil als $x$-Koordinate, den Imaginärteil als $y$-Koordinate hat. Das hat zur Folge, daß die Gerade, die durch die von $z_0$ und $z_1$ beschriebenen Punkte geht, nur die durch $tz_0 + (1 - t)z_1$ mit reellem $t$ beschriebenen Punkte enthält.

Nennen wir die durch 1 beschriebene Ecke des Vielecks $P_0$, und bezeichnen wir mit $z$ die komplexe Zahl, die eine der beiden Nachbarecken von $P_0$ beschreibt, so beschreiben die Potenzen von $z$ genau die Ecken von $V_n$. Der Einfachheit halber seien die Ecken von $V_n$ so indiziert, daß $z^k$ gerade $P_k$ beschreibt.

Nun nehmen wir an, dass es drei Diagonalen gibt, die durch einen Punkt gehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß eine Diagonale durch $P_0$ geht. Es gibt dann ganze Zahlen $r, s, t, u, v$, so daß die Geraden durch $P_0$ und $P_r$, $P_s$ und $P_t$, $P_u$ und $P_v$ einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Also gibt es reelle Zahlen $a, b, c$, so daß der Schnittpunkt beschrieben wird durch $(1 - a) + az^r$, durch $(1 - b)z^s + bz^t$ und durch $(1 - c)z^u + cz^v$. Da aber jeder Punkt der Ebene durch genau eine komplexe Zahl beschrieben wird, sind die drei oben angegebenen Grössen gleich:

$$(1) \qquad (1-z^s)+a(z^r-1)+b(z^s-z^t) = 0,$$

$$(2) \qquad (1-z^u)+a(z^r-1)+c(z^u-z^v) = 0.$$

Da alle Gleichungen in komplexen Zahlen richtig bleiben, wenn man für jede Zahl das konjugiert Komplexe einsetzt, und da das konjugiert Komplexe von $z$ gerade $z^{-1}$ ist, erhält man aus (1) und (2) noch

$$(3) \qquad (1-z^{-s})+a(z^{-r}-1)+b(z^{-s}-z^{-t}) = 0,$$

$$(4) \qquad (1-z^{-u})+a(z^{-r}-1)+c(z^{-u}-z^{-v}) = 0.$$

Die Gleichungen (1) bis (4) kann man als lineare Gleichungen von $a$, $b$ und $c$ auffassen; sie sind nur gleichzeitig erfüllbar, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet:

$$\begin{vmatrix} 1-z^s, & z^r-1, & z^s-z^t, & 0 \\ 1-z^u, & z^r-1, & 0, & z^u-z^v \\ 1-z^{-s}, & z^{-r}-1, & z^{-s}-z^{-t}, & 0 \\ 1-z^{-u}, & z^{-r}-1, & 0, & z^{-u}-z^{-v} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir die dritte Zeile mit $z^{s+t}$ multiplizieren und dann die erste Zeile addieren und zu der mit $z^{u+v}$ multiplizierten Zeile die zweite Zeile addieren, kommen wir zu

$$(z^s - z^t)(z^u - z^v) \begin{vmatrix} (1-z^t)(1-z^s), & (1-z^{s+t-r})(1-z^r) \\ (1-z^v)(1-z^u), & (1-z^{u+v-r})(1-z^r) \end{vmatrix} = 0.$$

Da sich keine zwei Diagonalen in einer Ecke des Vielecks schneiden, sind die Zahlen 0, $r$, $s$, $t$, $u$, $v$ alle voneinander verschieden. Also muß die Determinante verschwinden, das heißt

$$(5) \quad F(z) = (1-z^t)(1-z^s)(1-z^{u+v-r}) - (1-z^u)(1-z^v)(1-z^{s+t-r}) = 0.$$

Nun ist $z$ jedoch eine primitive $n$-te Einheitswurzel, und alle primitiven $n$-ten Einheitswurzeln $w$ erfüllen eine Gleichung $P(w) = 0$, wobei $P(w)$ ein irreduzibles Polynom ist, das von $n$ aber nicht von der Wahl von $w$ abhängt, siehe etwa [2] Seite 170. Also muss $F(z)$ durch $P(z)$ teilbar sein. Aber da $z^2$ wieder eine $n$-te primitive Einheitswurzel ist, weil $n$ ungerade ist, ist $P(z^2)$ teilbar durch $P(z)$. Außerdem ist $F(z^2)$ teilbar durch $P(z^2)$ und damit durch $P(z)$. Da $P(z) = 0$, verschwindet auch $F(z^2)$. Nun ist

$$F(z^2) - (1+z^t)(1+z^s)(1+z^{u+v-r})\,F(z) = (1-z^u)(1-z^v)(1-z^{s+t-r})\,G(z),$$

so daß

$$(6) \quad G(z) = (1+z^t)(1+z^s)(1+z^{u+v-r}) - (1+z^u)(1+z^v)(1+z^{s+t-r}) = 0,$$

denn $(1 - z^u)(1 - z^v) \neq 0$, da $P_u$, $P_v$ und $P_0$ verschieden sind, und $z^{s+t-r} \neq 1$, da $P_0 P_r$ nicht zu $P_s P_t$ parallel ist. Subtrahieren wir (5) von (6) und dividieren durch 2, dann erhalten wir

$$(7) \quad \begin{aligned} H(z) &= z^t + z^s + z^{u+v-r} - z^u - z^v - z^{s+t-r} \\ &= z^{-r}\{(z^r - z^u)(z^r - z^v) - (z^r - z^s)(z^r - z^t)\} = 0. \end{aligned}$$

Man überlegt sich genau so wie bei (5), daß dann auch $H(z^2)$ verschwindet, und kommt dann durch entsprechende Ueberlegungen zu

$$(8) \quad (z^r + z^u)(z^r + z^v) - (z^r + z^s)(z^r + z^t) = 0.$$

Multipliziert man (7) mit $z^r$ und addiert es zu (8), so erhält man

$$2(z^{u+v} - z^{s+t}) = 0. \tag{9}$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn $(u + v) - (s + t)$ durch $n$, die Anzahl der Ecken des Vielecks, teilbar ist. Unsere Anordnung der Punkte würde dann dazu führen, daß die Diagonale durch $P_u$ und $P_v$ parallel zur Diagonalen durch $P_s$ und $P_t$ ist. Damit stimmt (9) nicht mit unseren Voraussetzungen überein und die Annahme, daß es drei Diagonalen gibt, die durch einen Punkt gehen, ist falsch. Wir haben also gezeigt:

*Ein regelmäßiges Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Ecken hat (außer den Eckpunkten) keine Schnittpunkte von drei oder mehr Diagonalen.*

## LITERATUR

[1] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, New York, 1961.

[2] B. L. van der Waerden, *Algebra, 1. Teil*, 5. Auflage, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960.

H. Heineken
Department of Mathematics
University of Notre Dame
Notre Dame, Indiana.