5. An example.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

is solvable is open with respect to the interval [0, 1]. This follows from *a)*. It is also closed, for if $\tilde{\lambda}$ is the supremum of Λ then there exists a point $\lambda^* \in \Lambda$ with $|\tilde{\lambda}^* - \lambda| \, \| w_0 - w_1 \| < c$. Thus it follows from *a)*, if w_0 is replaced by $w_0 - \lambda^* (w_0 - w_1)$, that $\tilde{\lambda} \in \Lambda$. Hence $\Lambda = [0, 1]$ and (4.1) has a solution for all $w \in B_2$.

Proof of Theorem 4.1 a. Let $w_1 \in B_2$ and $u_0 \in D$ with $Tu_0 = w_0$ be given. Then the points $w = w_0 + \lambda (w_1 - w_0)$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, are bounded:

$$\| w \| \leqq \max (\| w_0 \|, \| w_1 \|) = A .$$

Because of γ') there exists a number R with $\| Tu \| > A$ for all u in the set $\{ u \in D \colon \| u \| \geqq R \}$.[1])

Then the same conclusion as in the proof of Theorem 4.1 with $c = c(R)$ applied to $\| u \| \leqq R$ shows that $Tu = w_1$ is solvable by an element u_1 with $\| u_1 \| < R$ for which the assumptions of Theorem 4.1 with $c = c(R)$ hold. This implies the existence of a sphere $\| w - w_1 \| < c$ with the asserted properties.

5. An example.

The simple example $Tu = \tan u$, given only for illustration purposes, shows that Theorem 4.1 is general enough to cover cases in which either the domain D is not the whole space B_1 or $Tu = w$ does not have a unique solution, although this equation is solvable for all $w \in B_2$.

Let $B_1 = B_2 = B$ be the Banach space of real numbers. Then by Theorem 4.1 the equation

$$Tu \equiv \tan u = w , \quad u, w \in B ,$$

is solvable for all $w \in B$.[2])

Proof. We choose

$$Kv = \frac{v}{\cos^2 u} \quad \text{for} \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

---

1) This set may be empty.
2) This is not true for complex numbers as tan u = i is not solvable.

Then by the mean value theorem and because

$$\frac{d}{du}\frac{1}{\cos^2 u} = \frac{2 \sin u}{\cos^3 u},$$

is increasing for increasing

$$u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

it follows that

$$m(u) = \frac{1}{\cos^2(u+r)} - \frac{1}{\cos^2 u} \quad \text{for} \quad 0 \leqq u < \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad u+r < \frac{\pi}{2}.$$

In the following we restrict ourselves to these u.

From the above we get

$$(\| K^{-1} \|^{-1} - m)r > \left(\frac{1}{\cos^2(u+r)} - \frac{4r}{\cos^3(u+r)}\right)r, \; 0 < r < \frac{\pi}{2} - u.$$

Now choosing r as the smallest positive solution of $r = r(u) = \frac{1}{8}\cos(u+r)$, which implies $u+r < \frac{\pi}{2}$, we get

$$(\| K^{-1} \|^{-1} - m)r > \frac{1}{16 \cos(u+r)} > \frac{1}{16}.\,[1]$$

The same is true for $-\frac{\pi}{2} < u < 0$ as can be proved in the same way. Thus the conditions of Theorem 4.1 are valid. In particular γ) is true for $c = \frac{1}{16}$.

6. Inverse function theorems (continued).

As was indicated by the example $\tan u = w$ in the last chapter, the assumptions of the Theorems 4.1 and 4.1 a are not sufficient to insure that the operator T will have an inverse

[1]) Here we use the fact that u is real.