Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

Autor: Fréchet, Maurice

Kapitel: Cinquième Section Une application à la définition des fonctions monogènes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39417

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Enfin, prenons pour $F(x, y, z)$ la fonction:

$$F(x, y, z) = \alpha(x, y)[z - \varphi(x)].$$

La fonction $\alpha(x, y)$ est bornée au voisinage de l'origine, on aura donc $F(x, y, \varphi(x)) = 0$ et en particulier $F(o, o, o) = o$. Cette fonction $F(x, y, z)$ est différentiable à l'ancien sens théorique à l'origine. C'est-à-dire que ses trois dérivées partielles existent à l'origine. En effet:

$$\frac{F(x, o, o) - F(o, o, o)}{x} = \frac{\alpha(x, o)[o - \varphi(x)]}{|x|} = -1.$$

Donc $F'_x(o, o, o)$ existe et est égal à -1.

$$\frac{F(o, y, o) - F(o, o, o)}{y} = \frac{\alpha(o, y)[o - o]}{y} = 0.$$

Donc $F'_y(o, o, o)$ existe et est nul.

Enfin

$$\frac{F(o, o, z) - F(o, o, o)}{z} = \frac{\alpha(o, o)(z - o)}{z} = k.$$

Donc $F'_z(o, o, o)$ existe et est égal à $k \neq 0$. Toutes les conditions du théorème C sont vérifiées au sens ancien de la différentiabilité. A ce même sens, puisque la solution $\varphi(x)$ n'est pas dérivable, la conclusion du théorème (que $\varphi(x)$ est différentiable à l'origine) n'est pas exacte.

Cinquième Section

Une application à la définition des fonctions monogènes

On dit avec Emile Borel qu'une fonction complexe $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ est *monogène* au point $c = a + ib$, si cette fonction est dérivable en ce point. C'est-à-dire que

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'_c + \varepsilon \text{ avec } \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0.$$

En posant $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, cherchons à quelles conditions doivent satisfaire P et Q pour que $f(z)$ soit monogène pour $z = c$. Conformément à l'usage en vigueur à son époque, Goursat [1] résoud le problème aux pages 6 à 9 de l'édition de 1905 du tome II de son cours d'analyse, en prouvant d'abord que les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ doivent avoir des dérivées partielles au point considéré et alors en supposant (hypothèses H)

1°) qu'elles en ont encore au voisinage de ce point,

2°) que ces dérivées partielles sont continues au point considéré.

Nous allons voir que la définition moderne de la différentielle *permet de réduire considérablement* cette hypothèse H et même d'obtenir une condition nécessaire et suffisante.

En effet, si $f(z)$ est monogène au point c, on peut écrire

$$\Delta f = (f'_c + \varepsilon)\Delta z \quad \text{ou} \quad \Delta P + i\Delta Q = (A + iB + \varepsilon' + i\varepsilon'')(\Delta x + i\Delta y),$$

d'où

$$\Delta P = (A + \varepsilon')\Delta x - (B + \varepsilon'')\Delta y$$

et

$$\Delta Q = (B + \varepsilon'')\Delta x + (A + \varepsilon')\Delta y$$

avec $\lim\limits_{\Delta z \to o} \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{Bmatrix} = 0.$

D'après la définition donnée plus haut, page 185, il en résulte que *P et Q sont différentiables au sens moderne au point (a, b)* et que leurs différentielles

$$dP = P'_a dx + P'_b dy$$

$$dQ = Q'_a dx + Q'_b dy$$

sont telles que $P'_a = A$, $P'_b = -B$, $Q'_a = B$, $Q'_b = A$.

Ceci exige que l'on ait:

$$P'_a = Q'_b, \quad P'_b = -Q'_a. \tag{35}$$

Réciproquement si 1°) P et Q sont différentiables au point (a, b), ce qui implique qu'elles ont chacune leurs deux dérivées partielles au point (a, b), 2°) ces dérivées partielles vérifient les condi-

tions (35) dites de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z)$ sera monogène pour $z = 0$, car on aura:

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q = (A+\varepsilon')\Delta x - (B+\varepsilon'')\Delta y + i\left[(B+\varepsilon_1)\Delta x + (A+\varepsilon_2)\Delta y\right] + (\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y\,,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + iB + \eta$$

avec

$$|\eta| = \frac{|(\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y|}{|\Delta z|} \leqq |\varepsilon'| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon''| + |\epsilon_2|$$

et par suite, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \eta = 0$, c'est-à-dire que $f(z)$ est dérivable pour $z = c$.

En résumé: Pour que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit *monogène* pour $z = c = a + ib$, il faut et il suffit:

1°) que P et Q soient différentiables au sens moderne au point (a, b),

2°) que, ces fonctions ayant alors nécessairement des dérivées partielles au point (a, b), celles-ci vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$P'_a = Q'_b\,, \quad P'_b = -Q'_a\,.$$

Remarque: Nous avons établi ce théorème en 1919 [17]. Quelques années plus tard, Mrs. Chisholm Young l'a indépendamment redécouvert et l'a appelé « Théorème fondamental de la théorie des fonctions complexes ».

Sixième Section

Différentielles successives. Dérivées partielles du second ordre.

Avant de nous occuper des différentielles, disons quelques mots des dérivées partielles. On a longtemps admis implicitement que si f''_{xy} et f''_{yx} existent, elles sont égales. Pourtant leurs