Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES SUITES D'ENTIERS DEUX A DEUX PREMIERS ENTRE EUX

Autor: Sierpiski, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39418

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES SUITES D'ENTIERS DEUX A DEUX PREMIERS ENTRE EUX

par W. Sierpiński

Le but de cet article est de donner plusieurs théorèmes concernant les suites d'entiers deux à deux premiers entre eux. Ces théorèmes sont simples et leurs démonstrations sont élémentaires, mais je ne les ai pas trouvés dans la littérature mathématique qui m'était accessible.

Théorème 1. *Tout entier* >6 *est une somme de deux entiers* >1 *premiers entre eux.*

Démonstration. Si n est un nombre impair >3, on a $n=2+(n-2)$ et, évidemment $n-2>1$ et $(2, n-2)=1$. Le théorème 1 est donc vrai pour les nombres impairs >3.

Voici maintenant la démonstration, due à M. A. Mąkowski, pour les nombres n pairs >6.

Si n est un entier divisible par 4, $n=4k$, où, d'après $n>6$, k est un entier >1, on a $n=(2k-1)+(2k+1)$, où $2k+1>2k-1>1$ et les nombres $2k-1$ et $2k+1$, en tant que deux entiers impairs consécutifs, sont premiers entre eux.

Si, enfin, $n=4k+2$, où k est un entier >1 (puisque $n>6$), on a $n=(2k+3)+(2k-1)$ et les nombres $2k+3$ et $2k-1>1$ sont premiers entre eux, puisque si $0<d|2k-1$ et $d|2k+3$, on a $d|(2k+3)-(2k-1)$, donc $d|4$ et, comme d est un diviseur du nombre impair, on en conclut que $d=1$.

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré. Or, M. A. Mąkowski a remarqué aussi qu'il résulte sans peine d'une remarque de M. H. L. Adler que le nombre $g(n)$ de toutes les décompositions d'un nombre naturel $n>6$ en une somme de deux entiers, $n=a+b$, où $1<a<b$ et $(a, b)=1$ est égal à $g(n)=\frac{1}{2}[\varphi(n)-2]$, où $\varphi(n)$ est la fonction bien connue d'Euler.

En effet, M. Adler a remarqué que, pour n entier >1, $\varphi(n)$ est le nombre de tous les systèmes de deux nombres

naturels x, y, tels que $x+y = n$, $1 \leqslant x \leqslant n$ et $(x, n) = 1 = (y, n)$.[1]) Or, si $x+y = n$, on a $(x, y) = 1$ dans ce cas et seulement dans ce cas, où $(x, n) = (y, n) = 1$. Il en résulte que (pour $n > 1$) $\varphi(n)$ est le nombre de toutes les décompositions du nombre n en une somme de deux entiers positifs premiers entre eux. Si l'on exclut les décompositions $n = 1+(n-1)$ et $n = (n-1)+1$, alors, dans les $\varphi(n)-2$ décompositions qui resteront, les nombres x et y seront tous les deux >1, d'où la formule pour $g(n)$. Or, puisque, comme on le sait, $\varphi(n) > 2$ pour n entiers >6, il en résulte aussi tout de suite le théorème 1. M. A. Mąkowski a remarqué aussi que, vu que $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = +\infty$, il en résulte aussi que $\lim\limits_{n=\infty} g(n) = +\infty$.

Théorème 2. *Tout nombre naturel est, d'une infinité de manières, différence de deux nombres naturels premiers entre eux.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème 2 il suffit de remarquer que si n est un nombre naturel donné, on a pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ la décomposition

$$n = (nk+n+1)-(nk+1),$$

où

$$(nk+n+1,\ nk+1) = (n,\ nk+1) = 1.$$

Théorème 3. *Tout entier >17 est une somme de trois entiers >1, deux à deux premiers entre eux.*

Démonstration. Si n est un nombre pair >8, on a $n = 6k$, ou $n = 6k+2$, ou bien $n = 6k+4$ et, comme $n > 8$, nous pouvons admettre que dans les deux premiers cas k est un entier >1 et que dans le troisième cas k est un entier >0. Vu les formules

$$6k = 2+3+[6(k-1)+1], \quad 6k+2 = 3+4+[6(k-1)+1],$$
$$6k+4 = 2+3+(6k-1),$$

on conclut sans peine que n est une somme de trois entiers >1, deux à deux premiers entre eux.

---

1) H. L. Adler, *A generalization of the Euler φ-function*, Amer. Math. Monthly 65 (1958), p. 690-692.

Voici maintenant la démonstration de M. A. Mąkowski pour n impairs >17. Vu que $19 = 3+5+11$, nous pouvons même supposer que n est un nombre impair >19. Si n est un tel nombre, on a $n = 12k+\gamma$, où $\gamma = 1, 3, 5, 7, 9$ ou 11, et où k est un entier positif et même, pour $\gamma \leqslant 7$, $k>1$. Vu les identités

$$\begin{aligned}
12k+1 &= 9+(6k-7)+(6k-1)\,,\\
12k+3 &= 3+(6k-1)+(6k+1)\,,\\
12k+5 &= 3+(6k-5)+(6k+7)\,,\\
12k+7 &= 9+(6k+5)+(6k-7)\,,\\
12k+9 &= 9+(6k-1)+(6k+1)\,,\\
12k+11 &= 3+(6k+7)+(6k+1)
\end{aligned}$$

on conclut que n est toujours une somme de trois entiers >1. Les nombres dans les parenthèses sont, dans chacune de ces six égalités, premiers par rapport aux nombres 3 et 9 et premiers entre eux, puisque ils sont tous impairs, non divisibles par 3, et leur différence est respectivement 6, 2, 12, 12, 2 et 6. On a donc dans chacun de ces six cas la décomposition du nombre impair $n>19$ en une somme de trois entiers >1, deux à deux premiers entre eux.

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Or, on démontre sans peine que le nombre 17 n'est pas une somme de trois entiers >1, deux à deux premiers entre eux.

Or, on peut démontrer que le nombre 30 n'est pas une somme de quatre entiers >1, deux à deux premiers entre eux, mais que tout entier >30 est une telle somme. Il se pose le problème si, pour tout entier $s>4$, tout entier suffisamment grand est une somme de s entiers >1, deux à deux premiers entre eux.

Théorème 4. *Il existe des progressions arithmétiques aussi longues que l'on veut, formées de nombres naturels >1, deux à deux premiers entre eux.*

Démonstration. Soit n un entier donné quelconque >1 et soit $a = n!$ Les n nombres

$$a+1\,,\ 2a+1\,,\ 3a+1\,,\ \ldots,\ na+1\,,$$

sont deux à deux premiers entre eux. En effet, si, pour les entiers k et l, tels que $0<k<l\leqslant n$, les nombres $ka+1$ et $la+1$ n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un diviseur premier commun p et on aurait $p\mid(l-k)a$, donc soit $p\mid l-k$, soit $p\mid a$. Mais, comme $l-k<l\leqslant n$, on a $(l-k)\mid n! = a$. On a donc toujours $p\mid a$, ce qui est impossible, vu que $p\mid ka+1$.

Le théorème 4 est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'il n'existe aucune progression arithmétique $ak+b$ ($k = 1, 2, \ldots$), où a et b sont des entiers positifs, dont tous les termes seraient deux à deux premiers entre eux. Nous démontrerons ici le théorème plus général suivant:

THÉORÈME 5. *Si* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *est un polynôme en* x *aux coefficients entiers, où le coefficient de la plus grande puissance de* x *est positif, les termes de la suite infinie*

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,$$

ne peuvent pas être deux à deux premiers entre eux.

Démonstration. Le coefficient de la plus haute puissance de x dans le polynôme $f(x)$ étant >0, il existe un entier $n>0$, tel que $m = f(n)>1$. Mais alors, comme on voit sans peine, le nombre $f(m+n)$ est divisible par m et les nombres $f(n)$ et $f(m+n)$ ont un diviseur commun $m>1$ et par suite ne sont pas premiers entre eux. Le théorème 5 est ainsi démontré.

THÉORÈME 6. *Si* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *est un polynôme en* x *aux coefficients entiers, où le coefficient de la plus grande puissance de* x *est positif, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une infinité des entiers positifs* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \ldots$, *tels que tous deux des nombres* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1), \mathrm{f}(\mathrm{x}_2), \mathrm{f}(\mathrm{x}_3), \ldots$ *soient premiers entre eux, est la condition C suivante:*

C. Il n'existe aucun nombre entier $\mathrm{d}>1$ *tel qu'on ait* $\mathrm{d}\mid\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *quel que soit l'entier positif* x.

La nécessité de la condition C étant évidente, nous démontrerons seulement leur suffisance. Dans ce but nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME. s *étant un entier positif et* $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \ldots, \mathrm{q}_s$ *des nombres premiers distincts pour lesquels il existe des entiers positifs* $\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots,$

t_s, *tels que* $q_i \nmid f(t_i)$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, s$, *il existe un entier positif* t *tel que* $q_i \nmid f(t)$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, s$.

Démonstration du lemme. Le lemme est évident pour $s = 1$. Soit maintenant s un nombre naturel donné et supposons que le lemme est vrai pour s nombres. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_s, q_{s+1}$ des nombres premiers distincts, pour lesquels il existe des entiers positifs $t_1, t_2, \ldots, t_{s+1}$, tels que $q_i \nmid f(t_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s+1$. Le lemme étant par hypothèse, vrai pour s nombres, il existe un entier positif t_0, tel que $q_i \nmid f(t_0)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Or, on a $q_{s+1} \nmid f(t_{s+1})$. Les nombres premiers $q_1, q_2, \ldots, q_{s+1}$ étant tous distincts, on a $(q_1 q_2 \ldots q_s, q_{s+1}) = 1$, d'où il résulte, comme on sait, qu'il existe des nombres naturels k et l tels que $t_0 + kq_1q_2 \ldots q_s = t_{s+1} + lq_{s+1}$. Soit $t = t_0 + kq_1q_2 \ldots q_s = t_{s+1} + lq_{s+1}$ On aura

$$f(t) \equiv f(t_0) \bmod q_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, s \text{ et } f(t) \equiv f(t_{sH}) \bmod q_{s+1}$$

d'où, vu que $q_i \nmid f(t_0)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$ et $q_{s+1} \nmid f(t_{s+1})$, il résulte que $q_i \nmid f(t)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s, s+1$. Le lemme est donc vrai pour $s+1$ nombres. Il se trouve ainsi démontré par l'induction.

Démonstration du théorème 6. Supposons que le polynôme $f(x)$ satisfait à la condition C. Le coefficient de la plus grande puissance de x étant dans le polynôme $f(x)$ positif, il existe un nombre naturel x_1 tel que $f(x_1) > 1$. Soit maintenant n un entier donné $\geqslant 1$ et supposons que nous avons déjà déterminé les n nombres naturels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que (dans le cas où $n > 1$) les nombres $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ sont deux à deux premiers entre eux. Soient q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ tous les diviseurs premiers du nombre $f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)$. Le polynôme $f(x)$ satisfaisant à la condition C, il existe des entiers positifs $t_1, t_2, \ldots, t_s$, tels que $q_i \nmid f(t_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$, d'où, d'après notre lemme, nous concluons qu'il existe un nombre naturel x_{n+1}, tel que $q_i \nmid f(x_{n+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Vu la définition des nombres q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, il en résulte tout de suite que $(f(x_{n+1}), f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)) = 1$. Les nombres

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x_{n+1}),$$

sont donc premiers deux à deux.

Les nombres x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont ainsi définis par l'induction et la suitei nfinie

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots,$$

est telle que leurs termes sont deux à deux premiers entre eux. Nous avons ainsi démontré que la condition C est suffisante. Le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

THÉORÈME 7. *Si* u_1, u_1, ... *est la suite infinie de Fibonacci* (c'est-à-dire la suite définie par les conditions: $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$), *il existe une suite infinie des entiers positifs croissants* n_1, n_2, ..., *telle que les nombres de la suite infinie*

$$u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, \tag{1}$$

sont deux à deux premiers entre eux.

Démonstration de M. A. ROTKIEWICZ. Comme on sait, si m et n sont des entiers positifs, on a $(u_m, u_n) = u_{(m, n)}$ [1]. Comme $u_1 = 1$, il en résulte tout de suite que si n_1, n_2, ... est une suite infinie croissante des entiers positifs deux à deux premiers entre eux, les termes de la suite infinie (1) sont deux à deux premiers entre eux. On peut prendre ici, par exemple $n_k = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, où p_k est le k - ième nombre premier, ou bien prendre $n_k = F_k = 2^{2^k} + 1$, où $k = 1, 2, \ldots$

M. A. ROTKIEWICZ a remarqué aussi qu'il résulte de la formule pour (u_m, u_n), que si n_1, n_2, ... est une suite infinie croissante d'entiers positifs, les nombres de la suite infinie (1) sont dans ce cas et seulement dans ce cas deux à deux premiers entre eux, si, quels que soient les entiers k et l, tels que $1 \leqslant k < l$, on a $(n_k, n_l) \leqslant 2$.

Remarque. Dans la suite infinie de tous les nombres consécutifs de Fermat, $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, les termes de cette suite sont, comme on le démontre sans peine, deux à deux premiers entre eux. Dans la suite de nombres de Mersenne, $M_n = 2^n - 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les nombres de la suite M_{p_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ où p_k est le k - ième nombre premier, sont deux à deux premiers entre eux. On peut aussi démontrer que les termes de la suite

---

[1]) Voir, par exemple, mon livre *Teoria Liczb* II, Warszawa 1959. p. 280, exercice 5 L'édition anglaise de ce livre est sous presse.

infinie $M_{F_n} = M_{2^{2^n}+1} = 2^{2^{2^n}+1}-1$ (n = 1, 2, ...) sont deux à deux premiers entre eux.

THÉORÈME 8. *a, b et c* étant des entiers positifs, *si l'équation* ax+by = c *a une solution en nombres entiers x, y, elle a une infinité de solutions en nombres entiers x, y premiers entre eux.*

Démonstration. Nous pouvons admettre que $(a, b) = 1$, puisque, si $d = (a, b)$, $a = da_1$, $b = db_1$, alors, d'après $ax+by = c$ on trouve $d|c$, donc $c = dc_1$, et notre équation est équivalente à l'équation $a_1x+b_1y = c_1$, où $(a_1, b_1) = 1$.

Supposons donc que a, b et c sont des entiers positifs, $(a,b) = 1$ et qu'il existe des entiers x_0 et y_0 tels que $ax_0+by_0 = c$. On aura donc aussi $a(x_0+bt)+b(y_0-at) = c$, quel que soit l'entier t.

Comme $(a,b) = 1$, il existe, comme on sait, des entiers u et v tels que $au+bv = 1$.
Posons

$$t = kc-(x_0 v - y_0 u)+1\,, \tag{2}$$

en choisissant l'entier positif k de sorte que l'entier (2) soit positif, ce qui subsiste pour tous les k suffisamment grands. Il résulte de (2) que

$$(t+(x_0 v - y_0 u)\,,\ c) = 1\,. \tag{3}$$

Soit d un entier positif tel que $d \mid x_0+bt$ *et* $d \mid y_0-at$. Il en résulte que $d|ax_0+by_0 = c$ et, comme $au+bv = 1$, on a

$$d \mid (x_0+bt)v-(y_0-at)u = x_0v-y_0u+(au+bv)\,t = x_0v-y_0u+t\,.$$

On a donc $d|c$ et $d|x_0v-y_0u+t$, d'où il résulte, d'après (3), que $d = 1$. Les entiers $x = x_0+bt$ et $y = y_0-at$ sont donc premiers entre eux et on a $ax+by = c$. Le théorème 8 se trouve ainsi démontré.

D'après une remarque de M. A. SCHINZEL le théorème 8 peut être déduit sans peine d'un théorème de M. T. SKOLEM, publié dans *Norsk Mat. Tidsskrift* 15, p. 25-27 (cf. aussi *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.* 59_I (1933), Sonderheft II, p. 129).

W. Sierpiński
Konopczyńskiego 5/7 m. 38
Warszawa 1.

(Reçu le 8 novembre 1962.)