2. Tangent Quadric

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

VERTEX POINTS OF FUNCTIONS

by Ali R. Amir-Moéz

For f a real function of n variables, usually the Hessian matrix is studied in connection with Gaussian and mean curvatures of $f(x_1, \ldots, x_n)$. In this paper we study other properties of f in a neighborhood of a point. In particular we get a method for obtaining vertex points of the function f. We also generalize the idea to some complex cases.

1. Definitions and notations

Let f a function of complex variables $x_1, \ldots, x_n$ be of class C'' in $x_1, \ldots, x_n$, and $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, in a neighborhood of a point. Then f is called unitarily analytic if

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = \overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}_i \, \partial x_j}\right)}.$$

Theorem: Let f be of class C'' in $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ in a neighborhood of a point, and

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_k} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)}.$$

Then f is unitarily analytic.

The proof is quite simple and we omit it. Note that the converse is not necessarily true.

2. Tangent Quadric

Let f be unitarily analytic in a neighborhood of $(c_1, \ldots, c_n)$. Let, for example, $\frac{\partial f}{\partial c_1}$ be the value of $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ at $(c_1, \ldots, c_n)$, and

$f_c = f(c_1, \ldots, c_n)$. Then

$$(x_1 - c_1 \ldots x_n - c_n) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial c_1 \partial \bar{c}_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial c_1 \partial \bar{c}_n} & \overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial c_1}\right)} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial c_n \partial \bar{c}_1} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial c_n \partial \bar{c}_n} & \overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial c_n}\right)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial c_1} & & \dfrac{\partial f}{\partial c_n} & f_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n - c_n \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

is called the tangent quadric of f at $(c_1, \ldots, c_n)$. We shall study only the cases that at least one of the first or second derivatives is not zero. It is clear that the tangent plane of (2.1) at $(c_1, \ldots, c_n)$ is the same as the tangent plane of $f = 0$ at this point.

Let the matrix of (2.1) be A, $\xi = (x_1 - c_1 \ldots x_n - c_n)$, and $\eta = (0 \ldots 0\ 1)$. Then by section 8 of [1]

$$\xi A \eta^* = 0 \tag{2.2}$$

is the tangent plane of (2.1) at $(c_1, \ldots, c_n)$. Here η^* is the conjugate transpose of η.

We easily see that (2.2) can be written as

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial c_i}(x_i - c_i) = 0 . \tag{2.3}$$

3. Matrices related to f

Besides A there are other matrices of some interest. We denote the matrix of the quadratic form of (2.1) by Q. The projection on the normal and tangent plane are of some interest. We denote the projection on the normal by P, and clearly $I - P$ is the projection on the tangent plane where I is the identity matrix. It is easy to see that $P = (P_{ij})$, where