5. Vertex points

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

II. Let the rank of Q be k, and centers exist. Then these centers are solutions of

$$\xi_k = \xi E = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) EQ^{-1}, \tag{3.2}$$

where Q^{-1} is the reciprocal of Q, see [2]. That is, if E is the projection on the range of Q, then

$$Q^{-1}Q = QQ^{-1} = E.$$

Here we choose the center of quadric curvatures at a point of (3.2) so that, it is at the shortest distance from γ.

III. When the rank of Q is k and the quadric does not have centers, then we say that f does not have a center of quadric curvature.

4. Direction of quadric curvature

In part I and II of section 3 we respectively call the vectors ξ and ξ_k the directions of quadric curvature of f at $(c_1, \ldots, c_n)$. In III of section 3, we define the direction of quadric curvature to be a vector δ which satisfies

$$\delta = \delta E = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) EQ^{-1},$$

where E is the projection described in section 3.

5. Vertex points

Let at the point $\gamma = (c_1, \ldots, c_n)$ of f the direction of quadric curvature be the same as the normal to $f = 0$. Then γ is called a vertex point of the function f.

Theorem: A necessary and sufficient condition for a point to be a vertex point of the function f is that at that point

$$PQ = QP,$$

where P and Q are the matrices described in section 3.

Proof: At a vertex point the projection of the direction of quadric curvature on the tangent plane is zero. Thus

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1}(I-P) = 0 .$$

This implies that

$$Q^{-1} PQ = P .$$

In all cases this implies

$$PQ = QP .$$

A vertex point in particular may become a spherical point, i.e. a point where

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = \lambda \delta_{ij} , \lambda$$

is a constant.
A vertex point will be called a cylindrical point when

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = \lambda \delta_{ij} , i , j \leqq k ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = 0 , i , j > k .$$

6. Functions of fixed center

An interesting fact about these functions is that they are not necessarily quadrics.

The equation.

$$\xi Q = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{6.1}$$

where $\xi = (c_1 - x_1, \ldots, c_n - x_n)$, and $(c_1, \ldots, c_n)$ is the fixed center gives f. To produce a counter example we let the origin be the center and the dimension of the space be two. Then in the real case (6.1) becomes