Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CALCUL PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE TAYLOR D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

Autor: Comtet, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39424

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CALCUL PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE TAYLOR D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

par L. Comtet

Soit y une fonction de la variable complexe x, analytique dans un voisinage de ζ:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\zeta)^n . \tag{1}$$

Il est souvent commode pour obtenir rapidement les coefficients a_n de la série (1) de prouver que y satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes en x: dans ce cas, les a_n sont fournis par une récurrence linéaire dont les coefficients sont des polynomes en n, et leur calcul de proche en proche devient très aisé; on pourra même en déduire une formule explicite pour a_n dans le cas où la récurrence ainsi introduite a la forme:

$$P(n) \cdot a_n + Q(n) \cdot a_{n+p} = 0 .$$

Par exemple, au voisinage de 0, les fonctions: $y = e^x$, $y = \operatorname{Log}(1+x)$, $y = (1+x)^\alpha$, vérifient respectivement les équations différentielles: $y' - y = 0$, $(1+x)\, y' - 1 = 0$, $y'(1+x) - \alpha y = 0$, ce qui conduit à la forme bien connue de leurs coefficients a_n.

Dans cet ordre d'idées, il peut être intéressant de mettre l'accent sur le fait suivant:

Proposition. — *Toute fonction algébrique d'ordre* n *vérifie une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes et dont l'ordre est au plus égal à* (n—1).

Démonstration. — Nous supposerons la fonction algébrique y définie par:

$$f(x, y) = A_n(x) \cdot y^n + A_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + A_1(x) \cdot y + A_0(x) = 0 \qquad (2)$$

où les $A_i(x)$ sont des polynomes en x à coefficients complexes; en outre, le polynome f est supposé irréductible.

Nous utiliserons essentiellement le résultat suivant:

Toute fraction rationelle $\dfrac{C(x, y)}{B(x, y)}$ *de x et y (y défini par* (2)) (3)

peut se mettre sous la forme d'un polynome en y, de degré au plus égal à (n—1), *et dont les coefficients sont des fractions rationnelles en x.* [1]

Dans ces conditions, faisons choix d'une branche de la fonction algébrique y de telle sorte que dans un domaine Δ, y n'ait ni pôle, ni point critique (y est alors analytique). Dans Δ, la dérivation de (2) par rapport à x conduit à:

$$y' = -\frac{A_n' y^n + \ldots + A_0'}{nA_n y^{n-1} + \ldots + A_1}. \qquad (4)$$

Compte tenu de (3), (4) s'écrit encore:

$$y' - D_0^{(1)} - D_1^{(1)} y = D_2^{(1)} y^2 + \ldots + D_{n-1}^{(1)} y^{n-1} \qquad (5_1)$$

où les $D_i^{(1)}$ sont fractions rationnelles de x; dérivons (5_1), et remplaçons y' par sa valeur tirée de (5_1) chaque fois qu'il est en facteur avec un y^j. Compte tenu à nouveau de (3), on obtient

$$y'' - D_0^{(2)} - D_1^{(2)} y = D_2^{(2)} y^2 + \ldots + D_{n-1}^{(2)} y^{n-1} \qquad (5_2)$$

et ainsi de suite jusqu'à la dérivée $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)} - D_0^{(n-1)} - D_1^{(n-1)} y = D_2^{(n-1)} y^2 + \ldots + D_{n-1}^{(n-1)} y^{n-1}. \qquad (5_{n-1})$$

L'élimination de $y^2, y^3, \ldots, y^{n-1}$ dans les $(n-1)$ équations (5) linéaires en $y^2, y^3, \ldots, y^{n-1}$ implique:

$$det \begin{bmatrix} y' - D_0^{(1)} - D_1^{(1)} y\,,\ D_2^{(1)}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ D_{n-1}^{(1)} \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ y^{(n-1)} - D_0^{(n-1)} - D_1^{(n-1)} y\,,\ D_2^{(n-1)}\,,\ \ldots\,,\ D_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{6}$$

Il suffit alors de chasser les dénominateurs des fractions rationnelles $D_j^{(i)}(x)$ et de développer le déterminant (6) par rapport à sa première colonne, pour obtenir la condition suivante, du type indiqué:

$$P_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + P_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + P_1(x) \cdot y' + P_0(x) \cdot y = S(x) \tag{7}$$

(P_i, S: polynomes en x).

Remarques

I. Une conséquence immédiate de la proposition est que, au voisinage d'un point ζ régulier pour une branche de y définie par (2), le développement (1) de la dite branche est tel que les a_n vérifient une récurrence linéaire dont les coefficients sont des polynômes en n, de degrés $\leqq$ n — 1 .

II. La question se pose évidemment de caractériser parmi les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes, celles qui admettent une intégrale qui est fonction algébrique (ou encore, parmi les récurrences linéaires dont les coefficients sont des polynômes en n, distinguer celles qui admettent une fonction algébrique pour fonction génératrice).

III. On pourrait appliquer le procédé indiqué plus haut à une fonction y définie par (2), où cette fois les A_i seraient des fonctions analytiques dans un certain domaine Δ, il s'ensuivrait encore une condition analogue à (7) où les P_i seraient des fonctions analytiques dans Δ.

Exemples d'applications

I. Développer en série entière $y = (1+(1+x)^{\frac{1}{2}})^{1/p}$ (x réel, p reel $\neq 0$). Il vient $y^{2p} - 2y^p - x = 0$, ce qui conduit à

$$4p^2 (x+x^2) y'' + 2p [(2p-2) + (3p-2) x] y' - (p-1) y = 0$$

d'où

$$a_{n+1} = -\frac{2pn [p(2n+1) - 2] - (p-1)}{2p(n+1)[2p(n+1) - 2]} a_n .$$

II. Equation différentielle vérifiée par une fonction y:

$$y^3 + p(x) \cdot y + q(x) = 0$$

où les p, q sont analytiques. Si l'on pose:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 ; \quad A = 6pp'q - 4p^2 q' ; \quad B = 2p^2 p' + 9qq' ;$$
$$C = 9p'q - 6pq' ; \quad A_1 = A'\Delta - A\Delta' + AB - 2C^2 q ;$$
$$B_1 = B'\Delta - B\Delta' + B^2 + 2AC - 2pC^2 ; \quad C_1 = C'\Delta - C\Delta' + 3BC ,$$

on trouve:

$$C\Delta^2 y'' - \Delta C_1 y' + (BC_1 - B_1 C) y + (AC_1 - A_1 C) = 0 .$$

Ainsi, par exemple, pour $y^3 + y + x = 0$, au voisinage de $x = 0$, on a $(4+27x^2) y'' + 27xy' - 3y = 0$ ce qui fournit

$$a_{n+2} = -\frac{3(3n+1)(3n-1)}{4(n+1)(n+2)} a_n \qquad (a_{2q} = 0) .$$

Références

[1] H. Milloux (avec la collaboration de Ch. Pisot): Traité de théorie des fonctions, publié sous la direction de M. Gaston Julia: Principes, méthodes générales. *Gauthier-Villars*, 1956.

L. Comtet
96, av. André Morizet
Boulogne, Seine
France

(Reçu le 5 juillet 1963)