$$\det \begin{bmatrix} y' - D_0^{(1)} - D_1^{(1)} y\,, & D_2^{(1)}\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, & D_{n-1}^{(1)} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ y^{(n-1)} - D_0^{(n-1)} - D_1^{(n-1)} y\,, & D_2^{(n-1)}\,, & \ldots\,, & D_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{6}$$

Il suffit alors de chasser les dénominateurs des fractions rationnelles $D_j^{(i)}(x)$ et de développer le déterminant (6) par rapport à sa première colonne, pour obtenir la condition suivante, du type indiqué:

$$P_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + P_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + P_1(x) \cdot y' + P_0(x) \cdot y = S(x) \tag{7}$$

(P_i, S: polynomes en x).

Remarques

I. Une conséquence immédiate de la proposition est que, au voisinage d'un point ζ régulier pour une branche de y définie par (2), le développement (1) de la dite branche est tel que les a_n vérifient une récurrence linéaire dont les coefficients sont des polynômes en n, de degrés $\leqq n - 1$.

II. La question se pose évidemment de caractériser parmi les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes, celles qui admettent une intégrale qui est fonction algébrique (ou encore, parmi les récurrences linéaires dont les coefficients sont des polynômes en n, distinguer celles qui admettent une fonction algébrique pour fonction génératrice).

III. On pourrait appliquer le procédé indiqué plus haut à une fonction y définie par (2), où cette fois les A_i seraient des fonctions analytiques dans un certain domaine Δ, il s'ensuivrait encore une condition analogue à (7) où les P_i seraient des fonctions analytiques dans Δ.