**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 11 (1965)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
**Autor:** Fréchet, Maurice
**Kapitel:** I. Comparaison des convergences
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-39967

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit: les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50] [1]), une méthode pour résoudre le problème suivant:

Etant donnés un polynome à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire $p$, trouver la puissance la plus élevée $p^n$ de $p$ qui divise le polynome pour toutes les valeurs entières de la variable.

## Séries Numériques

### I. *Comparaison des convergences*

Considérons deux séries convergentes à termes positifs $s = \Sigma u_n$, $t = \Sigma v_n$ et désignons par $r_n = s - s_n$, $\rho_n = t - t_n$ leurs restes de rang $n$.

Borel dit que la série $s$ converge plus rapidement que la série $t$ si $\frac{\rho_n}{r_n} \to \infty$ avec $n$. Nous dirions plutôt dans ce cas que $s$ converge *beaucoup* plus rapidement que $t$. Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que $s$ converge plus rapidement que $t$ quand la plus petite limite de $\frac{\rho_n}{r_n}$ est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de $\Sigma u_n$, elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série, $\Sigma u'_n$, obtenue en rangeant les termes de $\Sigma u_n$ par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que $\Sigma u_n$. Nous avons même pu donner un exemple [2]), où en

---

[1]) Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

[2]) C. R. du 27 février 1961.

changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une série moins rapidement convergente, même au sens de Borel, que $\Sigma u_n'$.

Borel s'attache particulièrement au cas où les séries considérées ont une « convergence régulière » parce que, d'après lui, ce sont les seules séries qui se rencontrent naturellement. Il montre cependant qu'on peut « fabriquer » une convergence irrégulière et, par exemple, construire une série où les sommes partielles $s_n$ sont, pour une suite de valeurs de $n$, voisines de $e^n$ et pour une autre suite de valeurs de $n$, voisines de $e^{e^n}$.

Représentons par la notation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

le fait que la série $s$ converge plus rapidement que la série $t$; on voit facilement que cette notation est transitive. Nous avons pu montrer par un exemple (voir la note ci-dessus) que la relation: Rap. $s \succsim$ Rap. $t$ (exprimant qu'on n'a pas: Rap. $t \succ$ Rap. $s$) *n'est pas* transitive. Mais notre exemple est à convergence irrégulière. Il serait intéressant de voir si la relation redevient transitive quand on se borne aux convergences régulières.

## II. *Sommabilité d'une série*

Borel a obtenu ([5]) une condition suffisante pour qu'en opérant un certain changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on n'altère pas sa somme: il suffit que le produit du terme général (de rang $m$) par le déplacement maximum des termes qui le précédent, tende vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

Mais la contribution principale et très remarquable de Borel concernant les séries, c'est sa définition des séries divergentes sommables, [19], [41], [42] et l'étude de leurs propriétés.

L'égalité:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$

n'était traditionnellement valable que pour $|x| < 1$, c'est-à-dire quand la série était convergente au sens classique.