Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: § 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39972

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Comme exemple-type, je considère le problème de la vibration fondamentale d'une membrane couvrant un domaine G du plan et fixée sur le contour Γ: on cherche $u_1(x, y)$ et un nombre λ_1 tels que $\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0$ et $u_1 > 0$ dans G, et $u_1 = 0$ sur Γ. Le principe de Rayleigh dit:

$$\lambda_1 = \mathrm{Min}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{D(v)}{\iint\limits_G v^2 \, dA} \right\} .$$

On peut aussi l'énoncer ainsi:

(14) $\lambda_1 = \max k$ sous la condition: $\underset{v=0 \text{ sur } \Gamma}{\forall} \; D(v) - k \iint\limits_G v^2 \, dA \geqq 0$.

Nous posons ici

$$\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) \equiv f_x^2 + g_y^2 - k\left[\mu f^2 + (1-\mu) g^2\right] ,$$

où $\mu(x, y)$ est une fonction arbitraire dans G; la condition (6) est alors satisfaite. Nous avons maintenant, quelle que soit $\mu(x, y)$, $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition $\underset{\left\{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant (13)} \\ \text{avec } \chi(s) \equiv 0}\right.}{\forall} \iint\limits_G \tilde{F} \, dA \geqq 0$.

En effet, si l'on restreint f et g par $f \equiv g$, alors on retrouve pour k la condition (14); ici la classe des k admissibles a été restreinte, donc max k est devenu plus petit.

Maintenons fixes le nombre k et la fonction $\mu(x, y)$, et cherchons les paires $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ qui rendent stationnaire l'intégrale: nous avons les deux équations d'Euler

$$0 = -\tfrac{1}{2}[\tilde{F}]_f = \hat{f}_{xx} + k\mu\hat{f}; \qquad 0 = -\tfrac{1}{2}[\tilde{F}]_g = \hat{g}_{yy} + k(1-\mu)\hat{g} .$$

Supposons (c'est essentiel ici !) $\hat{f} > 0$ *et* $\hat{g} > 0$ *dans* G. Eliminons μ: les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ satisfont

$$(15) \qquad -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} = k = \text{const.}$$

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ satisfaisant (15) avec $k > 0$, posons $\mu(x, y) = -(1/k)(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$; alors $1 - \mu = -(1/k)(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$; les équations d'Euler relatives à μ sont alors satisfaites par $\hat{f}$ et $\hat{g}$. Pour f et g ($= 0$ sur Γ) quelconques, nous vérifions

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)\, dA &= \iint_G \left[f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ &= \iint_G \left[\left(f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left(g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geqq 0, \end{aligned}\right.$$

donc $\lambda_1 \geqq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$, d'où

$$(17)\qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\substack{\hat{f}, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}} \left(-\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18)\qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\substack{f, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}} \inf_G \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ sont « les meilleures ».

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre $u_1(x, y)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de grad u_1; tandis que le champ vectoriel grad u_1/u_1 est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons — grad v/v par $\vec{q}$, c'est-à-dire — grad v par $v\vec{q}$ dans (14). $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition

$$\forall_{\substack{v, \vec{q} \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma}} \iint_G [v^2 \vec{q}^{\,2} - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\operatorname{grad} v + v\vec{q})]\, dA \geqq 0,$$