Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE
Autor: Godbillon, C. / Reeb, G.
Kapitel: 3. Fibres sur le branchement simple
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40748

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ayant le branchement simple pour espaces des feuilles, résultat qui précise ici un théorème général de W. Kaplan [2].

Dans une dernière partie on restreint le groupe structural des fibrés au groupe des translations et au groupe des difféomorphismes de $\mathfrak{R}$. Dans ce cas-ci on obtient aussi un théorème de classification des fibrés différentiables séparés; par contre on ne peut plus en déduire une classification différentiable des feuilletages différentiables du plan.

2. Le branchement simple

Soient $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ deux exemplaires de la droite réelle paramétrés respectivement par x_1 et x_2. Le branchement simple X est le quotient de la somme topologique $\Sigma = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ par la relation d'équivalence qui identifie les points x_1 et x_2 pour $x_1 = x_2 = x < 0$. On note π la projection de Σ sur X.

L'espace X est une variété topologique de dimension 1 non séparée. En effet $U_1 = \pi(\mathfrak{R}_1)$ et $U_2 = \pi(\mathfrak{R}_2)$ sont des ouverts de X, et les restrictions de π à $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définissent un atlas de X; on identifiera l'intersection $U = U_1 \cap U_2$ avec l'intervalle $]-\infty, 0[$ de $\mathfrak{R}$. Les points $o_1 \in U_1$ et $o_2 \in U_2$, images par π des origines de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$, sont les points de branchement de X (points non séparés).

L'involution de Σ qui échange les deux exemplaires $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définit une involution continue h de X qui échange les deux ouverts U_1 et U_2 en laissant fixes les points de U.

Plus généralement, un homéomorphisme f de X laisse U_1 et U_2 invariants ou les permute; le premier cas est caractérisé par $f(o_1) = o_1$ (ou $f(o_2) = o_2$), le second par $f(o_1) = o_2$ (ou $f(o_2) = o_1$). Dans tous les cas on a $f(U) = U$.

On peut enfin remarquer que le branchement simple est un espace contractile, donc acyclique.

3. Fibrés sur le branchement simple

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré localement trivial de base X et de fibre $\mathfrak{R}$; tous les fibrés intervenant dans la suite étant de ce type, on dira simplement que η est un fibré sur X.

On peut considérer η comme un fibré à groupe structural au sens de Steenrod [3]; le groupe de structure est ici le groupe G des homéomor-

phismes de la droite réelle $\mathfrak{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Les fibrés induits par η sur les ouverts U_1 et U_2 sont triviaux. Deux trivialisations $\Phi_1 : U_1 \times \mathfrak{R} \to p^{-1}(U_1)$ et $\Phi_2 : U_2 \times \mathfrak{R} \to p^{-1}(U_2))$ de η/U_1 et η/U_2 déterminent alors un changement de carte continu $g :]-\infty, 0[\to G$ (noté $x \to g_x$) tel que

$$\Phi_1(x_1, y) = \Phi_2(x_2, g_x(y)) \quad \text{pour } x_1 = x_2 = x < 0 .$$

Réciproquement une application continue g de $]-\infty, 0[$ dans G permet de construire un fibré $\eta = (E, p, X)$ sur X; g détermine de plus des triavialisations Φ_1 et Φ_2 de η/U_1 et η/U_2.

Soit g' une seconde application continue de $]-\infty, 0[$ dans G et soient $\eta' = (E', p', X)$ le fibré associé, Φ'_1 et Φ'_2 les trivialisations correspondantes de η/U_1 et η'/U_2. Un isomorphisme F de η sur η' détermine un homéomorphisme f de X. Si o_1 est un point fixe de f, on peut trouver deux applications continues α et β de $\mathfrak{R}$ dans G telles que

$$F\Phi_1(x_1, y) = \Phi'_1(f(x_1), \alpha_{x_1}(y))$$

$$F\Phi_2(x_2, y) = \Phi'_2(f(x_2), \beta_{x_2}(y));$$

la condition de compatibilité s'écrit alors

$$g'_{f(x)}\alpha_x = \beta_x g_x \quad \text{pour tout} \quad x < 0 .$$

Réciproquement la donnée de deux applications continues α et β de $\mathfrak{R}$ dans G et d'un homéomorphisme f de $]-\infty, 0]$ vérifiant la condition de compatibilité précédente permet de construire un isomorphisme F de η sur η'.

Si par contre f échange o_1 et o_2 la condition de compatibilité s'écrit

$$\alpha_x = g'_{f(x)}\beta_x g_x \quad \text{pour tout} \quad x < 0 .$$

Les fibrés η et η' sont équivalents dans G si on peut trouver un isomorphisme F pour lequel f est l'identité.

PROPOSITION 1.

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X. On peut réduire le groupe de structure de η au sous-groupe G^+ des homéomorphismes croissants de $\mathfrak{R}$.

Démonstration. — Le groupe G des homéomorphismes de $\mathfrak{R}$ a deux composantes connexes par arcs: le sous-groupe G^+ et l'ensemble G^- des homéomorphismes décroissants.

Soit g le changement de carte associé à des trivialisations de η/U_1 et η/U_2. Si g est à valeurs dans G^-, η est équivalent au fibré associé à $-g$; il suffit en effet de prendre $\alpha_x = -\beta_x =$ identité pour tout $x \in \mathfrak{R}$.

COROLLAIRE.

Tout fibré sur X est orientable.

On supposera dorénavant que les fibrés sur X sont définis par un changement de carte à valeurs dans G^+

PROPOSITION 2.

Les fibrés η et η' associés aux changements de carte $x \to g_x$ et $x \to g_x^{-1}$ sont isomorphes dans G^+.

Il suffit en effet de prendre pour α et β l'application constante de $\mathfrak{R}$ sur l'identité, et pour homéomorphisme de X l'involution h.

Remarque. — Les fibrés η et η' ne sont pas en général équivalents dans G^+ comme le montre l'exemple où g est défini par $g_x(y) = y + \frac{1}{x}$.

Mais dans cet exemple η et η' sont équivalents dans G (on prend $\alpha_x = \beta_x = -$ identité pour tout $x \in \mathfrak{R}$). Par contre si g est défini par $g_x(y) = -xy$, η et η' ne sont pas équivalents dans G.

PROPOSITION 3.

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X. L'espace E est une variété topologique de dimension 2 (en général non séparée), simplement connexe et acyclique.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la trivialité locale et de la suite exacte d'homotopie de η [3].

COROLLAIRE.

Si E est séparé, il est homéomorphe au plan $\mathfrak{R}^2$. Les fibres de η définissent alors un feuilletage du plan ayant X pour espace des feuilles.

Remarque. — Dans cette dernière situation le changement de carte g définit non seulement une orientation du feuilletage, mais aussi une orientation du plan.

Si deux tels fibrés sont isomorphes dans G^+, l'homéomorphisme correspondant du plan est compatible avec ces deux orientations; par contre un isomorphisme dans G, et non dans G^+ induit un homéomorphisme compatible avec les orientations des feuilletages, mais renversant l'orientation du plan.

4. Critères de séparation

Soient $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X, Φ_1 et Φ_2 des trivialisations de η/U_1 et η/U_2, et g le changement de carte associé.

Les ensembles $p^{-1}(U_1)$, $p^{-1}(U_2)$ et $p^{-1}(X - \{o_1, o_2\})$ sont des ouverts séparés de E. Par conséquent si $e_1 \in p^{-1}(U_1)$ et $e_2 \in p^{-1}(U_2)$ sont des points non séparés de E on a $e_1 = \Phi_1(0, y)$ et $e_2 = \Phi_2(0, z)$.

Proposition 4.

Pour que E soit non séparé, il faut et il suffit qu'il existe
une suite (ξ_n) de nombres négatifs tendant vers 0,
une suite (y_n) ayant une limite finie y,
telles que la suite $(g_{\xi_n}(y_n)$ ait une limite finie z.

Démonstration. — La condition est suffisante car la suite $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ converge simultanement vers les points $e_i = \Phi_1(0,y)$ et $e_2 = \Phi_2(0,z)$.

Supposons réciproquement que $e_1 = \Phi_1(0,y)$ et $e_2 = \Phi_2(0,z)$ soient deux points non séparés de E. Soient $(V_n)_{n \in N}$ (resp. $(W_n)_{n \in N}$) un système fondamental de voisinages emboités de e_1 (resp. de e_2) contenus dans $p^{-1}(U_1)$ (resp. $p^{-1}(U_2)$). Pour tout n on peut trouver un point $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ dans $V_n \cap W_n$. La suite (ε_n) tend alors simultanément vers e_1 et vers e_2 ; les suites (ξ_n), (y_n) et $(g(\xi_n)\, y_n)$ ont donc respectivement 0, y et z pour limites.

C.q.f.d.

Corollaire.

Soit z un point d'accumulation de $g_x(y)$ pour y fixé et x tendant vers 0. Alors les points $\Phi_1(0, y)$ et $\Phi_2(0, z)$ ne sont pas séparés dans E.

Exemples. — Soient $(\eta_i)_{0 \leqq i \leqq 7}$ les fibrés associés aux changements de carte suivants: