L'INITIATION AUX MATHÉMATIQUES, LES MATHÉMATIQUES MODERNES ET LA PSYCHOLOGIE DE L'ENFANT

Autor(en): **Piaget, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40749

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'INITIATION AUX MATHÉMATIQUES, LES MATHÉMATIQUES MODERNES ET LA PSYCHOLOGIE DE L'ENFANT

par Jean PIAGET

L'Enseignement mathématique publie ces temps-ci un certain nombre d'articles d'un grand intérêt sur la refonte nécessaire de l'initiation mathématique dès les classes élémentaires. Tous les auteurs sont d'accord sur la nécessité d'une telle réforme. Mais les uns sont désireux d'en accélérer le mouvement, tandis que d'autres conseillent la prudence, veulent éviter les exagérations, et montrent les dangers de l'introduction précoce de telle ou telle notion en réalité complexe ou pleine d'embûches lorsque l'on passe de son intuition à sa formalisation. Si l'on désire l'avis d'un psychologue, comme mon collègue et ami Karamata m'a fait l'honneur de me le demander, il n'est pas exclu que, selon les domaines considérés, ces deux tendances soient justifiées l'une et l'autre. Mais, pour conduire à leur conciliation, peut-être est-il utile de regarder d'un peu plus près ce qu'est en réalité le développement spontané ou « naturel » (au sens des nombres « naturels ») des opérations logico-mathématiques chez l'enfant et chez l'adolescent. Car, ce développement spontané existe (ce qui ne signifie naturellement en rien qu'il ne faille pas l'alimenter, le compléter et le prolonger par un enseignement adéquat) et le plus grand danger que courent les novateurs dans les réformes de l'enseignement mathématique, est de l'oublier purement et simplement, au risque de faire comme la maîtresse citée par J. Leray [1] qui parle « d'ensembles » à des enfants de 5 ans (sans se douter qu'ils parviendront plus tard par eux-mêmes à découvrir des réunions, des partitions, des intersections et des équivalences par correspondances, à condition qu'on les laisse ou fasse agir au lieu de leur brouiller la cervelle avec des discours incompréhensibles) [2].

J. Leray nous dit que l'enfant doit repasser par les étapes historiques qu'a vécues l'esprit humain, à la manière dont il récapitule le développement ancestral en son embryogenèse. C'est vrai dans les grandes lignes, mais

1) J. LERAY: L'initiation aux mathématiques, *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1966) p. 235.

2) La question préalable est que l'enfant comprenne la conservation d'un ensemble lorsque l'on modifie la disposition des sous-ensembles. Or, cette conservation n'est acquise que vers 6½-7 ans. Un collègue américain refaisait une de mes expériences à cet égard sur un enfant de 5 ans qui s'est alors mis à lui parler de « sets » (il avait lui aussi une maîtresse à la page !), mais n'en échouait pas moins aux questions d'équivalence et de conservation.

avec des exceptions majeures qui intéressent précisément les opérations mathématiques. Aristote déjà disait que ce qui est premier dans l'ordre de la genèse peut être dernier dans l'ordre de l'analyse. La raison en est que l'on découvre les résultats d'une opération bien avant de prendre conscience de son existence et surtout de ses mécanismes: certaines opérations très primitives génétiquement peuvent ainsi n'apparaître que tard dans l'histoire des sciences, comme la correspondance biunivoque avec Cantor.

A étudier en particulier la géométrie spontanée de l'enfant (celle de ses dessins, de ses représentations variées, de ses réactions à une série de questions non scolaires), on s'aperçoit du fait que la formation des intuitions et des opérations (par opposition aux perceptions, mais l'espace est très loin de se réduire à des données sensorielles) n'obéit nullement à l'ordre historique (métrique euclidienne, puis espaces projectifs et enfin structures topologiques), mais est beaucoup plus proche de l'ordre théorique: les premières intuitions opératoires sont de nature topologique (une topologie euclidienne, bien sûr, mais avec la considération des voisinages, des enveloppements, de l'ouverture et de la fermeture, des frontières, etc.), avec pendant longtemps un primat systématique des relations d'ordre l'emportant sur toute métrique; puis, mais seulement plus tard, se constituent conjointement et avec appui mutuel, les structures projectives et la métrique euclidienne.

Autre exemple de ce que fournit l'analyse génétique des opérations logico-mathématiques de l'enfant: à chercher ce que représentent les structures les plus générales des opérations concrètes se constituant vers 7 ans (avec comme critères psychologiques leur réversibilité ou caractère involutif, et les invariants auxquels ces opérations conduisent), on trouve au sein des classifications spontanées, sériations, correspondances, produits cartésiens, etc., trois grandes structures: les premières peuvent être dites algébriques en tant que leur réversibilité repose sur l'inversion, les secondes sont des structures d'ordre avec une réversibilité par réciprocité et les troisièmes peuvent être dites topologiques en tant que fondées sur les voisinages et le continu et non plus sur des équivalences ou non-équivalences entre quantités discrètes indépendantes de leur position. Il est difficile de ne pas reconnaître en ces faits l'indice du caractère « naturel » des trois structures-mères bourbakistes. Quant au rôle des ensembles, il est non moins difficile de contester l'analogie profonde entre leurs opérations constitutives et celles qui interviennent dans les principaux « groupements » de classification, sériation, etc., que nous avons été conduits à distinguer dans la logique des

opérations « concrètes » (c'est-à-dire portant sur les objets eux-mêmes) à partir de 7 ou 8 ans. Enfin, vers 11-12 ans, avec les opérations propositionnelles (portant sur des hypothèses et plus seulement sur les objets) apparaissent une combinatoire et l'emploi (nullement réflexif ou verbal, mais décelable aux opérations utilisées elles-mêmes) d'une forme particulière des *Vierergruppe* de Klein (avec inversions N, réciprocités R, corrélatives ou duales C et transformation identique I, d'où $RC = N$, $NC = R$, $NR = C$, et $NRC = I$, le tout s'appliquant commutativement à des implications, exclusions, conjonctions, incompatibilités, etc.) [1].

Cela rappelé, il est tout à fait possible et souhaitable d'entreprendre une profonde réforme de l'enseignement dans la direction des mathématiques modernes, car, par une convergence remarquable celles-ci se trouvent être bien plus proches des opérations naturelles ou spontanées du sujet (enfant ou adolescent) que ne l'était l'enseignement traditionnel de ces branches demeuré beaucoup trop asservi à l'histoire. Il faut bien le reconnaître en effet, cette convergence n'a rien que de très explicable: dans la mesure où le progrès des mathématiques remonte aux sources de leur construction en même temps qu'il élargit leur domaine, il rejoint de ce fait même certaines structures fondamentales de l'esprit. Comme l'a finement dit S. Papert à propos des travaux actuels sur les catégories, ceux-ci nous rapprochent des opérations « du » mathématicien davantage encore que de celles « de la » mathématique (et à ce propos, il y aurait quantité d'informations à ajouter aux précédentes sur le caractère « naturel » des « applications », des « fonctions » au sens qualitatif actuel, des morphismes, etc.).

Et si l'on s'engage dans cette voie, rien n'empêche non plus (et tout oblige au contraire) de prévoir une telle refonte à tous les degrés de l'enseignement: secondaire, bien sûr, mais aussi primaire et même préscolaire dans la mesure où une judicieuse organisation des actions (je dis bien des actions de l'enfant, par opposition aux discours ensemblistes de la maîtresse citée plus haut) peut préparer l'utilisation des fonctions, des ensembles (mais à commencer par des classifications et sériations qualitatives), des opérations également qualitatives ou logiques et la découverte des invariants.

Mais cela dit, la première précaution à prendre est de ne pas brûler les étapes. Ici nous rejoignons J. Leray, à cette réserve près qu'il faut assurément commencer par connaître ces étapes: or, ce que nous en savons est en général tranquillement ignoré des maîtres de mathématiques. Certes nous

[1]) D'autres formes du groupe quaternaire apparaissent dès 7 ans (en même temps que les bigroupes), par exemple dans les opérations permettant de passer de l'un des quatre casiers à un autre en une table à double entrée de forme *ab*, *a* non-*b*, non-*a* et *b*, et ni *a* ni *b*.

n'en sommes encore qu'aux premiers tâtonnements quant à notre connaissance du développement de l'intelligence, mais ces tâtonnements pourraient en éviter bien d'autres sur le terrain de la pratique pédagogique elle-même. « L'enseignement doit former en informant, faire découvrir et non professer la vérité » nous dit Leray et c'est bien là l'idéal auquel conduit toute psychologie. Or, le triste paradoxe que nous présentent trop d'essais éducatifs contemporains est de vouloir enseigner les mathématiques « modernes » avec des méthodes en fait archaïques, c'est-à-dire essentiellement verbales et fondées sur la seule transmission plus que sur la ré-invention ou la re-découverte par l'élève.

En d'autres termes l'initiation aux mathématiques modernes ne saurait être confondue avec une entrée de plain-pied en ses axiomatiques. On ne saurait en effet axiomatiser qu'un donné intuitif préalable et, psychologiquement, une axiomatique n'a de sens qu'à titre de prise de conscience ou de réflexion rétroactive, ce qui suppose toute une construction proactive antérieure. L'enfant dès 7 ans et l'adolescent manipulent sans cesse des opérations d'ensembles, de groupes, d'espace vectoriel, etc., mais ils n'en ont aucune conscience, car ce sont là des schèmes fondamentaux de comportement puis de raisonnement, bien avant de pouvoir être des objets de réflexion. Toute une gradation est donc indispensable pour passer de l'action à la pensée représentative et une non moins longue série de transitions demeure nécessaire pour passer de la pensée opératoire à la réflexion sur cette pensée. Le tout dernier échelon est alors le passage de cette réflexion à l'axiomatisation proprement dite. La construction mathématique procède par abstractions réfléchissantes (au double sens d'une projection sur de nouveaux plans et d'une reconstruction continuelle précédant les constructions nouvelles), et c'est de ce processus fondamental que trop d'essais éducatifs hâtifs prétendent se passer en oubliant que toute abstraction procède à partir de structures plus concrètes. Mais en conciliant les mathématiques modernes et les données psychologiques, le plus bel avenir s'ouvre à la pédagogie.

(Reçu le 15 janvier 1967)

J. Piaget
Centre international
d'épistémologie génétique
Université de Genève.