II. Quelques recherches personnelles récentes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

variation de $C(X)$ est au plus triphasée, mais encore $C(X)$ est une fonction convexe.

La combinaison linéaire $\Sigma a_i 0_i$ de plusieurs ovales ou ovoïdes est respectivement un ovale ou un ovoïde.

Précisons le sens de cette combinaison linéaire. Soit P un point fixe. Alors $a_i 0_i$ correspond à 0_i dans l'homothétie (P, a_i). Quant à $0' + 0''$, c'est l'ovale (ou l'ovoïde) constitué par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PM''}$, où M' et M'' sont respectivement des points arbitraires de $0'$ et de $0''$. (Si on change le point fixe P, le corps convexe $\Sigma a_i 0_i$ subit simplement une translation). (2)

L'ovale $\dfrac{0 + (-0)}{2}$ a des propriétés remarquables: il a un centre de symétrie; il a mêmes diamètre, largeur et périmètre que 0; son aire ne peut être inférieure à celle de 0. De même l'ovoïde $\dfrac{0 + (-0)}{2}$ a un centre de symétrie, conserve le diamètre, la largeur et la surface de 0, et son volume ne peut être inférieur à celui de 0.

II. Quelques recherches personnelles récentes

Le trait commun aux théorèmes groupés dans ce chapitre est qu'ils me sont particulièrement familiers, soit parce que j'en ai donné une nouvelle démonstration, soit même parce que je les ai trouvés.

Le théorème des quatre sommets. — « Tout ovale, dont la courbure du contour est définie en chaque point, a au moins quatre sommets », c'est-à-dire que sa courbure passe par quatre extrema au moins. Cette proposition, aujourd'hui bien classique, a été trouvée en 1908 par l'Indien Mukhopadyaya. J'en ai donné une démonstration purement géométrique, dans un article intitulé « spirales et ovales ». (3)

Le théorème des deux tiers. — Appelons noyau d'un ovale son intersection avec le symétrique par rapport à son centre de

gravité (plaque homogène). « L'aire du noyau est supérieure ou égale aux deux tiers de celle de l'ovale; l'égalité n'est atteinte que par les triangles. » Je l'ai trouvé et démontré avec quelques restrictions en 1955 ([4]). Trois ans après il a été établi complètement par l'Américain Stewart et le Russe Kozinec, indépendamment l'un de l'autre.

Le théorème des quatre cinquièmes. — « Le rapport de la plus petite à la plus grande des deux aires découpées dans un ovale par une droite qui passe en son centre de gravité est supérieur ou égal à 0,8; l'égalité ne peut être atteinte que par un triangle. » Cette propriété a été découverte par Winternitz en 1923. J'en ai donné une nouvelle démonstration ([5]), puis, en 1955, j'ai trouvé et démontré la proposition analogue de l'espace: « Soit V le volume d'un ovoïde et v celui d'une portion détachée par un plan passant en son centre de gravité. Alors $\frac{v}{V} \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3$; l'égalité ne peut être atteinte que par un cône » ([6]). Dans ([4]) j'avais formulé la conjecture générale suivante: « Soit V la mesure d'un corps convexe à n dimensions et v celle d'une portion détachée par un hyperplan $(n-1)$-dimensionnel, passant en son centre de gravité. Alors $\frac{v}{V} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ». Cette conjecture a été démontrée en 1960 par Grünbaum ([7]) et par P. C. Hammer ([8]). Remarquons qu'il en résulte que $\frac{v}{V} > \frac{1}{e}$ quel que soit n (Le rapport critique est donc toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2{,}72}$).

Pour terminer je mentionnerai deux théorèmes concernant les corps convexes placés dans un réseau entier ([9]):

Généralisation du théorème de Minkowski. — Rappelons d'abord ce théorème fondamental de la géométrie des nombres. « Si un corps convexe à n dimensions a un centre de symétrie 0, appartenant à un réseau n-dimensionnel, et que sa mesure réticulaire est supérieure à 2^n, 0 n'est pas le seul point entier interne. Il existe une infinité de parallélotopes de mesure 2^n, dont le centre est le seul point entier interne. » Cette année ([10]) j'ai

indiqué les raisons pour lesquelles on peut très probablement remplacer dans cet énoncé « centre de symétrie » par « centre de gravité », si l'on remplace la mesure critique 2^n par $\frac{(n+1)^n}{n!}$ et le mot « parallélotope » par « simplexe ». En particulier je l'ai démontré pour $n = 2$ ([11]): « Si le centre de gravité d'un ovale est placé en un point entier 0 d'un réseau, dont une base est un carré de côté 1, et que son aire est supérieure à $\frac{9}{2}$, il renferme un point entier autre que 0; il existe une infinité de triangles d'aire $\frac{9}{2}$, dont le centre de gravité est le seul point entier intérieur. »

Théorème des points entiers. — Cette année également, j'ai établi dans *l'Enseignement Mathématique* ([12]) le résultat suivant: « Soient S et l l'aire et le périmètre d'un ovale situé dans le plan d'un réseau orthonormé, et j le nombre de points entiers situés dans l'ovale ou sur son bord. Alors $j \leqslant S + \frac{l}{2} + 1$; l'égalité ne peut être atteinte que par des rectangles. » Dans la même note j'ai établi des bornes analogues pour le j d'un ovoïde. Mais je n'ai pu démontrer que pour certaines familles de corps convexes, l'intéressante conjecture suivante: « Soient V et S le volume et la surface d'un ovoïde, et a, b, c ses hauteurs dans la direction des axes d'un réseau orthonormé. Alors $j \leqslant V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1$; l'égalité ne peut être atteinte que par des parallélépipèdes rectangles. » (A fortiori, si D désigne le diamètre de l'ovoïde, $j < V + \frac{S}{2} + 3D + 1$, borne non stricte, mais qui a l'avantage d'être invariante par rapport aux déplacements.)

III. Théorèmes curieux

Peut être vous rappelez-vous comme moi de l'étonnement qui fut le vôtre, le jour où pour la première fois on vous a parlé de la roue de Reuleau: il y a une infinité d'ovales, autres que le cercle, qui ont même hauteur dans toutes les directions. C'est que dans le domaine qui nous occupe, il faut se méfier tout parti-