**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 12 (1966)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG
**Autor:** Domiaty, R. Z.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-40727

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG

von R. Z. Domiaty

## 1. Einleitung und Problemstellung

Unter *Funktionen* $f(x), g(x), z(x), \ldots$ verstehen wir im weiteren ausnahmlos eindeutige, reelle Funktionen, die auch $\pm\infty$ als Funktionswerte annehmen dürfen, mit dem Definitionbereich (0,1). Dabei bezeichnet $(a, b)$ das offene Intervall $a < x < b$ und $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall $a \leqq x \leqq b$.

An jeder Stelle $x_0$ des Definitionsbereiches kann man einer Funktion $f(x)$ eine Menge $L_f(x_0)$ nach der Vorschrift

$$L_f(x_0) = \bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \qquad x_0 \varepsilon (0,1) \qquad (1)$$

zuordnen. Dabei verstehen wir unter $(a_n)$ eine Folge und unter $(a_n)'$ die Häufungswertmenge von $(a_n)$. Mit $\bigcup_\lambda A_\lambda$ bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der Mengen $A_\lambda$. Somit ist $L_f(x_0)$ eine Verallgemeinerung des Begriffes der Hülle einer Funktion an einer Stelle ihres Definitionsbereiches; vgl. z.B. [1], S. 188.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die Funktionalgleichung

$$L_f(x) = [f(x), +\infty] \qquad x \varepsilon (0,1). \qquad (2)$$

Eine Funktion $g(x)$ heisst eine *Lösung* von (2), wenn $g(x)$ die Funktionalgleichung (2) identisch, d.h. in jedem Punkt aus (0,1), erfüllt.

Wie man sieht, ist die Funktion $h(x) = +\infty$ eine Lösung von (2). Diese bezeichnen wir als die *triviale Lösung* von (2). Jede andere Lösung von (2) heisst eine *nichttriviale Lösung*.

Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion einer nichttrivialen Lösung von (2), und zwar ohne Verwendung des Auswahlaxioms oder gleichwertiger Sätze.

## 2. Ein Hilfssatz

Ein wesentliche Rolle wird die folgende Aussage spielen:

Hilfsatz 1. *Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn für jedes $x_0 \varepsilon (0,1)$ gilt:*

1. *Für jede Folge $(x_n)$ aus $(0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist*

$$\liminf f(x_n) \geqq f(x_0).$$

2. *Für jedes $a \varepsilon [f(x_0), +\infty]$ gibt es eine Folge $(y_n)$ aus $(0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$.*

*Beweis. a)* Wenn $f(x)$ eine Lösung von (2) ist, folgen die beiden Aussagen unseres Hilfssatzes unmittelbar aus der Bedeutung von $L_f(x_0)$ in (1).

*b)* Jetzt sei $f(x)$ eine Funktion, die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. $x_0$ sei ein beliebiger Punkt aus (0,1). Wir zeigen, dass $L_f(x_0) = [f(x_0), +\infty]$ ist. Wegen 1. gilt

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \subseteq [f(x_0), +\infty],$$

und wegen 2. auch

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \supseteq [f(x_0), +\infty].$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

## 3. Eine Darstellung reeller Zahlen aus (0,1) durch gewisse Folgen

Um eine nichttriviale Lösung von (2) zu konstruieren, benötigen wir eine spezielle Darstellung der reellen Zahlen aus (0,1), die von den üblichen Darstellungen abweicht. Bekanntlich kann man die Zahlen aus (0,1) eineindeutig durch nicht-abbrechende Dualbrüche darstellen. Wenn also $r$ eine beliebige reelle Zahl aus (0,1) ist, gilt

$$r = 0, \delta_1 \delta_2 \delta_3 \ldots \delta_i \ldots \qquad \delta_i = 0 \text{ oder } 1$$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

($E_1$) Es gibt einen Index $m$, $m \geqq 1$, für den $\delta_m = 0$ ist.

($E_2$) In der Folge der Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots$ kommt die Zahl 1 unendlich oft vor.

Die Aussage ($E_1$) trifft zu, weil $r \neq 1$ ist. ($E_2$) ist erfüllt, weil wir abbrechende Dualbrüche ausgeschlossen haben.

Jeder solchen Dualbruchentwicklung und damit jeder reellen Zahl aus (0,1) können wir in eindeutiger Weise eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, in der mindestens ein positives Element vorkommt, auf die folgende Art zuordnen:

($Z$) Wenn $r \varepsilon (0,1)$ ist und die Dualbruchentwicklung

$$r = 0, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_i \ldots = 0{,}\underbrace{0 \ldots 0}_{d_1}1\underbrace{0 \ldots 0}_{d_2}1\underbrace{0 \ldots 0}_{d_3}1 \ldots$$

Nullen Nullen Nullen

mit den Eigenschaften ($E_1$) und ($E_2$) besitzt, dann wird der Zahl $r$ die Folge $(d_m)$ zugeordnet. Diese Folge nennen wir im weiteren die *zugeordnete Folge*, kurz: die $Z$-Folge, von $r$.

$D$ sei die Menge aller Folgen $(d_m)$ mit den Eigenschaften:

($Z_1$) Für alle $m$ ist $d_m$ eine nichtnegative ganze Zahl.

($Z_2$) Es gibt einen Index $q$, für den $d_q > 0$ ist.

Dann stellt die Zuordnungsvorschrift ($Z$) eine eineindeutige Abbildung von (0,1) auf $D$ dar.

Wir können daher mit der gleichen Berechtigung, mit der wir eine reelle Zahl $r$ aus (0,1) durch einen Dualbruch darstellen, jetzt eine reelle Zahl durch die ihr nach ($Z$) zugeordnete $Z$-Folge aus $D$ darstellen.

Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl $r$, die einer $Z$-Folge $(d_m)$ aus $D$ zugeordnet ist, kann man mittels der Formel

$$r = \sum_{M=1}^{\infty} 2^{-\left\{M + \sum_{m=1}^{M} d_m\right\}} \tag{3}$$

angeben.

## 4. Sätze über das Rechnen mit $Z$-Folgen

Die eineindeutige Zuordnung der reellen Zahlen aus (0,1) zu den $Z$-Folgen aus $D$ schreiben wir abgekürzt in der Form

$$x \leftrightarrow (d_m) \qquad x \,\varepsilon\, (0,1),\ (d_m)\,\varepsilon\, D\,.$$

Damit ist gemeint, dass $(d_m)$ die der Zahl $x$ gemäss (Z) zugeordnete $Z$-Folge ist. Daraus kann man sofort folgende Aussage ableiten:

($A$) Wenn $x_1 \leftrightarrow (d_{1,m})$ und $x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$ ist, so ist $x_1 = x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,m} = d_{2,m}$ für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$

Das gibt jetzt Anlass zu der

Definition 1. Die natürliche Zahl $i = i\,(x_1, x_2)$ heisst der Index zweier verschiedener reeller Zahlen $x_1$ und $x_2$ aus (0,1), wenn folgendes gilt:

$$1.\quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}) \ \textit{und}\ x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$$

$$2.\quad d_{1,i} \neq d_{2,i}$$

3. Wenn $i > 1$ ist, so sei auch $d_{1,k} = d_{2,k}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, i - 1$.

Mit dieser Bezeichnung gilt jetzt

($B$) Es sei

$$x_1 \neq x_2, x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}) \ \textit{und}\ i = i\,(x_1, x_2)\,.$$

Dann ist $x_1 > x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,i} < d_{2,i}$.

Hilfssatz 2. *a) Es sei $x \leftrightarrow (d_m)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k\,(\varepsilon)$ derart, dass für alle $y\,\varepsilon\,(0,1)$ aus der Beziehung $i\,(x, y) > k$ die Beziehung $|x - y| < \varepsilon$ folgt.*

*b) Es sei*

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}),\ x \leftrightarrow (d_m),\ x_n \neq x \ \textit{und}\ i_n = i\,(x_n, x)$$

*für $n = 1, 2, \ldots$ Dann folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,.$$

*Beweis.* Da *b)* unmittelbar aus *a)* folgt, genügt es, *a)* zu beweisen. $\varepsilon > 0$ sei beliebig und fest. Wir wählen jetzt eine natürliche Zahl $k$ so, dass $\varepsilon > 2^{1-k}$ ist, und betrachten nur solche $y$ aus (0,1), für die $i(x, y) \geqq k + 1$ ist. Ein solches y greifen wir heraus. Die zugeordnete *Z-Folge* sei $(d_m^*)$, und der Index sei $i^*$. Dann kann man die Differenz $|x - y|$ vermöge (3) abschätzen:

$$
\begin{aligned}
|x - y| &= |2^{-(d_1+\ldots+d_{k+1}+k+1)} + 2^{-(d_1+\ldots+d_{k+2}+k+2)} + \ldots \\
&\quad - 2^{-(d_1^*+\ldots+d_{k+1}^*+k+1)} - 2^{-(d_{k+1}^*+\ldots+d_{k+2}^*+k+2)} - \ldots| \\
&\leqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k+1)}\left[2^{-d_{k+1}} + 2^{-(d_{k+1}+d_{k+2}+1)} + \ldots\right. \\
&\qquad \left. + 2^{-d_{k+1}^*} + 2^{-(d_{k+1}^*+d_{k+2}^*+1)} + \ldots\right] \\
&\leqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k+1)}\left[1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots\right] \\
&\leqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k)}\, 2^{-k+1} < \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Aussage *b)* in Hilfssatz 2 nicht umkehrbar ist. Das zeigt das Beispiel

$$
\begin{aligned}
x_n &= 2^{-1} + 2^{-5} + 2^{-5-n} \leftrightarrow (d_{n,m}) = (0, 3, n, 0, 0, \ldots 0, \ldots) \\
x &= 2^{-1} + 2^{-5} \leftrightarrow (d_m) = (0, 4, 0, 0, \ldots 0, \ldots) .
\end{aligned}
$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = 2$.

Im weiteren benötigen wir oft den bekannten

Hilfssatz 3. *$(q_l)$ sei eine Folge natürlicher Zahlen. Dann ist die Negation der Aussage $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$ gleichwertig mit der Aussage, dass in der Folge $(q_l)$ eine feste natürliche Zahl $k$ unendlich oft vorkommt.*

Weiter brauchen wir den

Hilfssatz 4. *Es sei $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$, $x \leftrightarrow (d_m)$, $x_n < x$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gleichwertig mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$.*

*Beweis.* Wegen Hilfssatz 2, *b)* haben wir nur zu beweisen, dass unter der angegebenen Voraussetzung aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ die Behauptung $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ folgt. Wir führen den Beweis indirekt. Aus der Annahme, dass $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ nicht gilt, folgt mit Hilfssatz 3, dass es eine natürliche Zahl $k$ gibt, die in der Folge der $(i_n)$ unendlich oft vorkommt. Es sei also $(\lambda_n)$ eine unendliche Teilfolge aus der Folge der natürlichen Zahlen $(n)$ mit der Eigenschaft

$$i_{\lambda_n} = k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Für alle $n$ gilt wegen (4)

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+1)} + 2^{-(d_1+d_2+2)} + \ldots + 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k)} + \ldots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+1)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+d_{\lambda_n,2}+2)} - \ldots - \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\ldots+d_{\lambda_n,2}+k)} - \ldots \\ &= 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k)} + 2^{-(d_1+\ldots+d_{k+1}+k+1)} + \ldots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\cdots+d_{\lambda_n,k}+k)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\cdots+d_{\lambda_n,k+1}+k+1)} - \ldots \\ &= 2^{-(d_1+\ldots+d_{k-1}+k)} \{2^{-d_k} + 2^{-(d_k+d_{k+1}+1)} + \ldots \\ &\quad - [2^{-d_{\lambda_n,k}} + 2^{-(d_{\lambda_n,k}+d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \ldots]\}. \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung sind alle $x_{\lambda_n}$ kleiner als $x$. Weil für jedes $\lambda_n$ stets $i(x_{\lambda_n}, x) = k$ ist, gilt also wegen $(B)$ für alle $\lambda_n$ die Beziehung

$$d_k + 1 \leqq d_{\lambda_n,k}.$$

Setzt man das in die vorhergehende Formel ein, so erhält man für alle $n$

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k)} \{1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} + \ldots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,k}-d_k)} [1 + 2^{-(d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \ldots]\} \\ &\geqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k))} [1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} - 2^{-1}(1 + 2^{-1} + \ldots)] \\ &= 2^{-(d_1+\ldots+d_{k+1}+k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Für alle $n$ gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geqq 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} > 0 .$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0 ,$$

d.h. die Folge $(x_n)$ kann nicht gegen $x$ konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass $\lim\limits_{n \to \infty} i_n = \infty$ nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

## 5. Konstruktion einer Lösung von (2)

Es sei $(d_m)$ eine $Z$-Folge aus $D$. (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{5}$$

zuordnen. Dabei bedeutet $\sum\limits_m{}^*$ die Summe über alle $m$, für die $d_m \neq 0$ ist. Es lässt sich zeigen, dass $z$ entweder eine positive reelle Zahl ist oder $\infty$. Denn nach Definition einer $Z$-Folge $(d_m)$ sind alle $d_m$ nicht negativ, und mindestens ein $d_m$ ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left( \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist $z$ entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \,\varepsilon\, (0, \infty] .$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus (0,1) in eineindeutiger Weise eine $Z$-Folge aus $D$ zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

ist, so soll

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{6}$$

sein.

Für diese Funktion gilt

$$0 < z(x) \leqq \infty \qquad x \,\varepsilon\, (0,1)\,. \tag{7}$$

Jetzt beweisen wir den folgenden

SATZ 1. *$z(x)$ ist eine nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung* (2).

*Beweis.* Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

1. *Schritt.* Es wird folgende Aussage bewiesen:

($A_1$) Wenn $x_0 \,\varepsilon\, (0,1)$, $z(x_0) = \infty$, $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} z(x_n) = \infty$.

Es sei $x_0 \leftrightarrow (d_m)$, $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nach Hilfssatz 4 ist Aussage $\lim x_n = x_0$ gleichbedeutend mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$. Unter Beachtung der Voraussetzung

$$z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

kann man jetzt zeigen, dass $z(x_n)$ bebliebig gross gemacht werden kann, wenn man nur $n$ genügend gross wählt; zu einer beliebig grossen Zahl $K > 0$ wählen wir eine natürliche Zahl $M$ so, dass

$$K < \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1}$$

ist. Weiter wählen wir eine zweite genügend grosse natürliche Zahl $N$ so, dass

$$i_n > M \qquad\qquad n > N$$

ist. Betrachten wir jetzt solche $x_n$, für die $n > N$ ist, so erhalten wir die Abschätzung

$$z(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_{n,m}^{-1} + \sum_{m=M+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$+ \sum_{m=M+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} > K.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = \infty ,$$

und somit ist $(A_1)$ verifiziert.

2. *Schritt.* Es wird gezeigt:

$(A_2)$ Wenn $x_0 \varepsilon (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gilt für alle Folgen $(x_n) \subset (0, x_0)$, die die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ erfüllen, die Beziehung

$$\lim\ \inf z(x_n) \geqq z(x_0) .$$

Wir beweisen $(A_2)$, indem wir die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch führen. Aus dieser Annahme kann man folgern: Es gibt einen Punkt $x_0$ und eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$, für welche gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = b < z(x_0) = a .$$

Die entsprechenden $Z$-Folgen seien

$$x_0 \leftrightarrow (d_m)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \\ i_n = i(x_n, x_0) \end{array}\right\} n = 1, 2, \ldots$$

Danach $(A_2)$ die Beziehung $x_n < x_0$ gilt, können wir wieder Hilfssatz 4 anwenden, und erhalten wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \infty .$$

Weil $z(x_0) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} = a$ ist, folgt nach bekannten Sätzen

über unendliche Reihen, dass ein $K$ angegeben werden kann, für das

$$\sum_{K}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} < \frac{a-b}{2}$$

gilt. (Ein solches $K$ existiert, da $a - b > 0$ ist.) Weiter wählen wir zu diesem $K$ ein $N$ derart, dass

$$i_n > K \qquad\qquad n > N$$

ist. Für diese Werte $N$, $K$ und $n > N$ schätzen wir jetzt die folgende Differenz ab:

$$\begin{aligned} z(x_0) - z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty}{}^* d_m^{-1} - \sum_{1}^{\infty}{}^* d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^{K-1}{}^* d_m^{-1} + \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{K-1}{}^* d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_m^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_{n,m}^{-1} < \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$z(x_0) - z(x_n) < \frac{a-b}{2} \qquad\qquad n > N.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n\to\infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} \leqq \frac{a-b}{2},$$

und dieses Resultat steht wegen unserer Annahme $b < a$ im Widerspruch zu

$$\lim_{n\to\infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} = a - b.$$

Es ist somit $b < a$ falsch und daher $(A_2)$ richtig.

3. *Schritt.* Nun zeigen wir:

$(A_3)$ Wenn $x_0 \varepsilon (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gibt es zu jedem $c \geqq a$ eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z(x_n) = c$.

Um $(A_3)$ zu beweisen, greifen wir wieder ein $c \geqq a$ und beliebiges $x_0 \varepsilon (0,1)$ heraus. Dann werden wir eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ konstruieren, für die gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = c.$$

Dem $x_0$ sei die $Z$-Folge $(d_m)$ zugeordnet. Nun stellen wir die Folgenglieder $x_n$ wieder durch $Z$-Folgen dar,

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Die $d_{n,m}$ werden nach folgender Vorschrift bestimmt:

$$(W_1) \qquad \begin{aligned} d_{n,m} &= d_m & n &= 1, 2, 3, \ldots \\ d_{n,n} &= d_n + n & n &= 1, 2, \ldots n - 1 \end{aligned}$$

Damit sind aber in jeder $Z$-Folge $(d_{n,m})$ erst die ersten $n$ Folgenglieder festgelegt. Die restlichen werden auf die folgende Art bestimmt: Wir setzen

$$a_n = c - a + \sum_{m=n}^{\infty} d_m^{-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Die $d_{n,m}$, $m > n$, sollen so bestimmt werden, dass

$$(W_2) \qquad \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = a_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ist. (Falls alle $a_n = 0$ sind, werden alle $d_{n,m} = 0$ gewählt, und die linke Seite wird gleich null gesetzt). Nicht-negative ganze Zahlen $d_{n',m}$ so zu finden, dass $(W_2)$ erfüllt ist, ist im allgemeinen sogar auf unendlich viele Arten möglich.

Hat man jetzt ein System von Folgen $(d_{n,m})$ nach $(W_1)$ und $(W_2)$ gefunden, so erfüllt die diesen $Z$-Folgen zugeordnete Folge $(x_n)$ die Bedingungen

$$x_n < x_0 ,$$

weil nach $(W_1)$ $i_n = i(x_n, x_0) = n$ und $d_{n,m} > d_n$ ist, [vgl. $(B)$ Abschnitt 4] und

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 ,$$

weil nach $(W_1)$ $\lim\limits_{n \to \infty} i_n = \infty$ ist [vgl. Hilfssatz 2 $(b)$]. Ausserdem gilt unter Verwendung von $(W_1)$ und $(W_2)$:

$$z(x_n) - z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*} d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a ,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) = c .$$

Damit ist auch $(A_3)$ bewiesen.

$(A_1)$, $(A_2)$ und $(A_3)$ ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

## 6. Weitere Folgerungen

Es sei $E$ die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und $F$ die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \textit{und} \quad E \cup F = (0,1) .$$

Die Lage von $E$ und $F$ in $(0,1)$ beschreibt der folgende

Satz 2. *Jeder Punkt $x \varepsilon (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge $E$ und auch der Menge $F$. (Genauer: In jeder Umgebung von $x$ kann man eine Teilmenge von $F$ bzw. $G$ angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit $(0,1)$ in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in $(0,1)$ dicht liegen.

*Beweisskizze.* Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten $x_1$ und $x_2$ $(x_1 < x_2)$ aus $(0,1)$ eine konti-

nuumsmächtige Teilmenge $E^* \subseteq E$ und eine kontinuumsmächtige Teilmenge $F^* \subseteq F$ existieren, die in $(x_1, x_2)$ liegen. Es sei

$$x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}),\ x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}),\ i = i(x_1, x_2) \text{ und } d_{1,i} > d_{2,i}\,.$$

Unter $(p_k)$ wollen wir im weiteren eine unendliche Folge verstehen, die aus der Folge $(2^k)$ durch eine beliebige Umordnung entsteht. $P$ sei die Menge aller Folgen $(p_k)$. $P$ besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, denn $P$ kann als die Menge aller Anordnungen der abzählbar-unendlichen Menge $2^1, 2^2, \ldots$ aufgefasst werden, und diese ist von der Mächtigkeit des Kontinuums; vgl. [3], *S.* 67.

Es sei $E^*$ die Menge aller $y \varepsilon (0,1)$, wobei

$$y \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(p_k) \varepsilon P$ und

$$d_m = \begin{cases} d_{2,m} & \text{für } m \leqq i \\ d_{2,i+1} + 1 & \text{für } m = i + 1 \\ p_k & \text{für } m = i + 1 + k\,. \end{cases}$$

gilt. Diese Menge $E^*$ ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, denn man kann jedem $y \varepsilon E^*$ genau eine Anordnung $(p_n) \varepsilon P$ zuordnen. Nach der Konstruktionsvorschrift ist ferner für jedes $y \varepsilon E^*$

$$i(y, x_1) = i\,, \qquad i(y, x_2) = i + 1,$$

$$d_{1,i} > d_i\,, \qquad d_{i+1} > d_{2,i+1}\,.$$

Also ist

$$x_1 < y < x_2 \qquad y \varepsilon E^*\,.$$

Da aber auch

$$z(y) = \sum_{m=1}^{i}{}^* d_m^{-1} + d_{i+1}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1}$$

$$= \sum_{m=1}^{i}{}^* d_{2,m}^{-1} + \frac{1}{d_{2,i+1} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

gilt, ist somit die Existenz von $E^*$ bewiesen. Der Existenz-

beweis von $F^*$ verläuft analog, wobei nur anstelle der Folge $(2^k)$ die Folge $(k)$ zu setzen ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Bezeichnet man mit $A(a)$, $0 < a < \infty$, die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für welche $z(x) = a$ ist, so kann man auch den folgenden Satz beweisen.

SATZ 3. 1. *$A(a)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

2. *$A(a)$ ist nirgends dicht in* $(0,1)$.

*Beweisskizze. Zu Punkt 1.* Jede positive reelle Zahl a kann in der Form

$$a = r_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-r_j}$$

dargestellt werden, wobei $r_0$ eine nicht-negative ganze Zahl ist und $r_j$ natürliche Zahlen sind, für die $r_j < r_{j+1}$ gilt $(j = 1, 2, \ldots)$. Es sei $Q$ die Menge aller Folgen $(q_s)$, wobei $(q_s)$ Folgen sind, die aus der Folge $(2^{r_s})$ durch beliebige Umordnungen hervorgehen. $M$ sei die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

$$\text{mit} \qquad (q_s) \varepsilon Q \quad \text{und}$$

$$d_m = \begin{cases} q_s & \text{für } m = 2t-1 \\ 1 & \text{für } m = 2t \text{ und } t \leqq n_0 \\ 0 & \text{für } m = 2t \text{ und } t > n_0 \end{cases} \qquad t = 1, 2, \ldots$$

gilt. $M$ besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, und für jedes $x \varepsilon M$ ist

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} = n_0 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s = a .$$

Es ist aber $(0,1) \supseteq A(a) \supseteq M$, und somit besitzt auch $A(a)$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

*Zu Punkt* 2. Man zeigt zunächst (ähnlich wie beim Beweis zu Hilfssatz 4), dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gleichwertig mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ ist, wenn man folgendes voraussetzt:

$$x_0 \leftrightarrow (d_m), \; x_n \leftrightarrow (d_{m,n}), \; x_n \neq x_0, \; i_n = i(x_n, x_0) \text{ und } (d_m)$$

enthält unendlich viele positive Glieder. Damit beweist man, dass aus

$$z(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

die Aussage

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = \infty$$

folgt. Den Beweis, dass $A(a)$ nirgends dicht in (0,1) ist, führt man dann indirekt. Aus der gegenteiligen Annahme folgt, dass eine Umgebung $U_0 \subseteq (0,1)$ existiert, in der $A(a)$ dicht liegt. Da nach Satz 2 die Menge $F$ in (0,1) dicht liegt, liegt $F$ auch $U_0$ dicht. Nun sei $y \varepsilon U_0 \cap F$. Es ist dann

$$z(y) = \infty .$$

Weil $A(a)$ in $U_0$ dicht, liegt muss es eine Folge $(y_n) \subset A(a)$ geben, für die $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ist. Nach dem obigen muss dann einerseits

$$\lim_{n\to\infty} z(y_n) = \infty$$

sein. Da aber anderseits für alle $n$ stets $z(y_n) = a$ ist, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} z(y_n) = a .$$

Das stellt einen Widerspruch gegen unsere Annahme dar. Somit ist diese Annahme falsch und damit unser Satz bewiesen.

## LITERATURVERZEICHNIS

[1] Hahn, H. *Reelle Funktionen*, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.

[2] Alexandroff, P. S. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

[3] Kamke, E. *Mengenlehre*, Sammlung Göschen Bd. 999/999*a*. Verlag Walter de Gruyter, Berlin 1955

(Reçu le 10 avril 1965)

Dr. R. Z. Domiaty
Technische Hochschule
Graz

vide-leer-empty