5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Für alle n gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geqq 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} > 0 .$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0 ,$$

d.h. die Folge (x_n) kann nicht gegen x konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass $\lim\limits_{n \to \infty} i_n = \infty$ nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

5. Konstruktion einer Lösung von (2)

Es sei (d_m) eine Z-Folge aus D. (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{5}$$

zuordnen. Dabei bedeutet $\sum\limits_m{}^*$ die Summe über alle m, für die $d_m \neq 0$ ist. Es lässt sich zeigen, dass z entweder eine positive reelle Zahl ist oder ∞. Denn nach Definition einer Z-Folge (d_m) sind alle d_m nicht negativ, und mindestens ein d_m ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist z entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \,\varepsilon\, (0, \infty] .$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus (0,1) in eineindeutiger Weise eine Z-Folge aus D zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

ist, so soll

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{6}$$

sein.

Für diese Funktion gilt

$$0 < z(x) \leqq \infty \qquad x \,\varepsilon\, (0,1)\,. \tag{7}$$

Jetzt beweisen wir den folgenden

SATZ 1. *$z(x)$ ist eine nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung* (2).

Beweis. Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

1. *Schritt.* Es wird folgende Aussage bewiesen:

(A_1) Wenn $x_0 \,\varepsilon\, (0,1)$, $z(x_0) = \infty$, $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} z(x_n) = \infty$.

Es sei $x_0 \leftrightarrow (d_m)$, $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nach Hilfssatz 4 ist Aussage $\lim x_n = x_0$ gleichbedeutend mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$. Unter Beachtung der Voraussetzung

$$z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

kann man jetzt zeigen, dass $z(x_n)$ bebliebig gross gemacht werden kann, wenn man nur n genügend gross wählt; zu einer beliebig grossen Zahl $K > 0$ wählen wir eine natürliche Zahl M so, dass

$$K < \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1}$$

ist. Weiter wählen wir eine zweite genügend grosse natürliche Zahl N so, dass

$$i_n > M \qquad\qquad n > N$$

ist. Betrachten wir jetzt solche x_n, für die $n > N$ ist, so erhalten wir die Abschätzung

$$z(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_{n,m}^{-1} + \sum_{m=M+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$+ \sum_{m=M+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} > K.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = \infty ,$$

und somit ist (A_1) verifiziert.

2. *Schritt.* Es wird gezeigt:

(A_2) Wenn $x_0 \varepsilon (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gilt für alle Folgen $(x_n) \subset (0, x_0)$, die die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ erfüllen, die Beziehung

$$\lim\ \inf z(x_n) \geqq z(x_0) .$$

Wir beweisen (A_2), indem wir die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch führen. Aus dieser Annahme kann man folgern: Es gibt einen Punkt x_0 und eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$, für welche gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = b < z(x_0) = a .$$

Die entsprechenden Z-Folgen seien

$$x_0 \leftrightarrow (d_m)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \\ i_n = i(x_n, x_0) \end{array}\right\} n = 1, 2, \ldots$$

Danach (A_2) die Beziehung $x_n < x_0$ gilt, können wir wieder Hilfssatz 4 anwenden, und erhalten wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \infty .$$

Weil $z(x_0) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} = a$ ist, folgt nach bekannten Sätzen

über unendliche Reihen, dass ein K angegeben werden kann, für das

$$\sum_{K}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} < \frac{a-b}{2}$$

gilt. (Ein solches K existiert, da $a - b > 0$ ist.) Weiter wählen wir zu diesem K ein N derart, dass

$$i_n > K \qquad\qquad n > N$$

ist. Für diese Werte N, K und $n > N$ schätzen wir jetzt die folgende Differenz ab:

$$\begin{aligned} z(x_0) - z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty}{}^* d_m^{-1} - \sum_{1}^{\infty}{}^* d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^{K-1}{}^* d_m^{-1} + \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{K-1}{}^* d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_m^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty}{}^* d_{n,m}^{-1} < \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$z(x_0) - z(x_n) < \frac{a-b}{2} \qquad\qquad n > N.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n\to\infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} \leqq \frac{a-b}{2},$$

und dieses Resultat steht wegen unserer Annahme $b < a$ im Widerspruch zu

$$\lim_{n\to\infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} = a - b.$$

Es ist somit $b < a$ falsch und daher (A_2) richtig.

3. *Schritt.* Nun zeigen wir:

(A_3) Wenn $x_0 \varepsilon (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gibt es zu jedem $c \geqq a$ eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z(x_n) = c$.

Um (A_3) zu beweisen, greifen wir wieder ein $c \geqq a$ und beliebiges $x_0 \varepsilon (0,1)$ heraus. Dann werden wir eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ konstruieren, für die gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = c.$$

Dem x_0 sei die Z-Folge (d_m) zugeordnet. Nun stellen wir die Folgenglieder x_n wieder durch Z-Folgen dar,

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Die $d_{n,m}$ werden nach folgender Vorschrift bestimmt:

$$(W_1) \qquad \begin{aligned} d_{n,m} &= d_m & n &= 1, 2, 3, \ldots \\ d_{n,n} &= d_n + n & n &= 1, 2, \ldots n - 1 \end{aligned}$$

Damit sind aber in jeder Z-Folge $(d_{n,m})$ erst die ersten n Folgenglieder festgelegt. Die restlichen werden auf die folgende Art bestimmt: Wir setzen

$$a_n = c - a + \sum_{m=n}^{\infty} d_m^{-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Die $d_{n,m}$, $m > n$, sollen so bestimmt werden, dass

$$(W_2) \qquad \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = a_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ist. (Falls alle $a_n = 0$ sind, werden alle $d_{n,m} = 0$ gewählt, und die linke Seite wird gleich null gesetzt). Nicht-negative ganze Zahlen $d_{n',m}$ so zu finden, dass (W_2) erfüllt ist, ist im allgemeinen sogar auf unendlich viele Arten möglich.

Hat man jetzt ein System von Folgen $(d_{n,m})$ nach (W_1) und (W_2) gefunden, so erfüllt die diesen Z-Folgen zugeordnete Folge (x_n) die Bedingungen

$$x_n < x_0 ,$$

weil nach (W_1) $i_n = i(x_n, x_0) = n$ und $d_{n,m} > d_n$ ist, [vgl. (B) Abschnitt 4] und

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 ,$$

weil nach (W_1) $\lim\limits_{n \to \infty} i_n = \infty$ ist [vgl. Hilfssatz 2 (b)]. Ausserdem gilt unter Verwendung von (W_1) und (W_2):

$$z(x_n) - z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*} d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a ,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) = c .$$

Damit ist auch (A_3) bewiesen.

(A_1), (A_2) und (A_3) ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

6. Weitere Folgerungen

Es sei E die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und F die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \textit{und} \quad E \cup F = (0,1) .$$

Die Lage von E und F in $(0,1)$ beschreibt der folgende

Satz 2. *Jeder Punkt $x \varepsilon (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge E und auch der Menge F. (Genauer: In jeder Umgebung von x kann man eine Teilmenge von F bzw. G angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit $(0,1)$ in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in $(0,1)$ dicht liegen.

Beweisskizze. Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$ aus $(0,1)$ eine konti-