Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN SYSTÈME NON-LINÉAIRE INTÉGRO-DIFFÉRENTIEL DE LA DYNAMIQUE DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES

Autor: Nohel, John A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40737

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UN SYSTÈME NON-LINÉAIRE INTÉGRO-DIFFÉRENTIEL DE LA DYNAMIQUE DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES

par John A. NOHEL *)

Considérons le système

$$(1) \qquad u'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, T(x,t)\, dx\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \eta(x)\, g\big(u(t)\big)\,,$$

$-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, avec les valeurs initiales

$$(2) \qquad u(0) = u_0\,, \qquad T(x, 0^+) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)\,.$$

Les fonctions α, η, f, g et la constante u_0 sont données; on cherche les fonctions $u(t)$, $T(x,t)$ définies sur $0 < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$ et satisfaisant (1) et (2).

Nous nous intéressons aux problèmes d'existence globale, d'unicité et de comportement qualitatif des solutions quand $t \to \infty$. En effet, on peut étudier le système (1), (2) en se servant de la théorie qualitative pour certaines équations du type de Volterra que nous avons déjà exposée [1]. Mais cette théorie n'est pas suffisante pour toute l'analyse; dès lors nous présentons un exposé presque tout à fait indépendant. Cet exposé est basé sur un article [2] que le Professeur Jacob J. Levin et moi avons récemment complété.

Nous supposons que

$$(3) \qquad g(u) \in C(-\infty, \infty)\,, \qquad ug(u) > 0 \qquad (u \neq 0)\,,$$

$$G(u) = \int_0^u g(\sigma)\, d\sigma \to \infty \; (|u| \to \infty)\,,$$

et

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha, \eta, f \in L_2(-\infty, \infty) \\ \eta \text{ satisfasse localement une condition de Hölder;} \end{cases}$$

dans les problèmes nucléaires $g(u) = e^u - 1$.

*) The preparation of this lecture was supported by the Air Force Office of Scientific Research Grant AF - AFOSR - 925 - 65.

Avec $g(u) \in C(-\infty, \infty)$ et (4) on peut préciser le calcul formel suivant et démontrer l'existence d'une solution locale (par rapport à t). Soit $u(t)$, $T(x, t)$ une solution du problème (1), (2) sur $0 \leqq t \leqq t_0$, $-\infty < x < \infty$, $t_0 > 0$.

La théorie de l'équation de la chaleur et (4) donnent que la fonction

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t) f(\xi)\, d\xi + \tag{5}$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)\, \eta(\xi)\, g\big(u(\tau)\big)\, d\xi\, d\tau$$

où

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right);$$

satisfait la deuxième équation de (1) et $T(x, 0^+) = f(x)$ en chaque point de continuité de f (et aussi dans L_2). Substituant (5) dans la première équation de (1) on arrive à l'équation:

$$u'(t) = -\int_0^t a(t-\tau)\, g\big(u(\tau)\big)\, d\tau - b(t) \qquad (0 < t \leqq t_0), \tag{6}$$

où

$$\begin{cases} a(t) = \int_0^{\infty} \exp(-x^2 t)\, h_1(x)\, dx, \; b(t) = \int_0^{\infty} \exp(-x^2 t)\, h_2(x)\, dx \\ h_1(x) = Re\, \hat{\alpha}(-x)\, \hat{\eta}(x), \; h_2(x) = Re\, \hat{\alpha}(-x)\, \hat{f}(x) \end{cases} \tag{7}$$

et $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier; évidemment, les fonctions $a(t)$, $b(t)$ sont continues, $0 \leqq t < \infty$.

La rigueur du calcul précédent est basée sur le fait (voir par exemple [3]) que (6) a (au moins) une solution $u(t)$ satisfaisant $u(0) = u_0$ et la solution existe sur $0 < t \leqq t_0$ pour un $t_0 > 0$; ensuite toutes les opérations précédentes sont réversibles.

On montre facilement (voir [4] pour le cas linéaire) le résultat suivant concernant l'unicité.

Théorème 1.

Si (4) *est satisfaite et l'équation* (6) *a au plus une solution* $u(t)$, $(u(0) = u_0)$, *qui existe sur* $0 < t \leqq t_0$ *pour un* $t_0 > 0$, *il existe au plus une solution* $u(t)$, $T(x, t)$, $0 < t \leqq t_0$, $-\infty < x < \infty$, *telle que*

$$u'(t) \text{ existe sur } 0 < t \leqq t_0, \lim_{t \to 0+} u(t) = u_0,$$

$$T(x,t)\, T_t(x,t),\, T_{xx}(x,t) \in C(-\infty < x < \infty,\, 0 < t \leqq t_0),$$

$$T(x,t) \in L_2(-\infty, \infty) \quad \text{et} \quad \sup_{0<t\leqq t_0} \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x,t)\, dx < \infty,$$

$$\lim_{t \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} |T(x,t) - f(x)|^2\, dx .$$

Pour le comportement qualitatif, supposons

$$(8)\begin{cases} \text{qu'il existe une fonction } h_3(x),\ 0 \leqq x < \infty \text{ et une constante } \Lambda \text{ telle que} \\ h_2^2(x) \leqq h_1(x)\, h_3(x),\ h_1(x) \geqq 0,\ h_3(x) \geqq 0, \\ \int_0^{\infty} h_1(x)\, dx > 0,\ h_3(x) \in L_1(0, \infty),\ \Lambda > 0 : \\ h_1(x)\, \xi^2 + 2\, h_2(x)\, \xi + h_3(x) \geqq \Lambda \big[|\hat{\eta}(x)|^2\, \xi^2 \\ \qquad + 2\, Re(\hat{f}(x)\, \hat{\eta}(-x)\, \xi + |(\hat{f}(x)|^2 \big], \end{cases}$$

et montrons le résultat principal:

Théorème 2.

Si les conditions (3), (4), (8) *sont satisfaites, il existe une solution de* (1), (2) *sur* $-\infty < x < \infty$, $0 \leqq t < \infty$ *et*

$$(9) \qquad \lim_{t \to \infty} u^{(k)}(t) = 0, \ (k = 0, 1, 2)$$

$$(10) \qquad \lim_{t \to \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} |T(x,t)| = 0 .$$

Démonstration.

Pour rendre cette démonstration plus facile, supposons aussi

$$\alpha' \in L_2(-\infty, \infty) .$$

Quelle que soit la démonstration, le but est premièrement de prolonger la solution locale à l'intervalle $0 \leqq t < \infty$ et deuxièmement d'établir (9) et (10). C'est dans la démonstration de (9), que cette démonstration est différente.

Soit $u(t)$ une solution locale de (6) satisfaisant $u(0) = u_0$. Définissons

$$(11) \qquad V(t) = G(u(t)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [h_1(x)\gamma^2(x,t) + 2h_2(x)\gamma(x,t) + h_3(x)] \exp(-2x^2 t)\, dx\,,$$

où

$$\gamma(x,t) = \int_0^t g(u(s)) \exp(x^2 s)\, ds\,.$$

Alors $V(t)$ est définie sur un intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ et $V(t) \geqq 0$.

Il s'ensuit de (6) et (11) que

$$(12) \qquad V'(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty [h_1(x)\gamma^2(x,t) + 2h_2(x)\gamma(x,t) + h_3(x)] x^2 \exp(-2x^2 t)\, dx\,,$$

et $V'(t) \leqq 0$, $0 \leqq t \leqq t_0$. Dès lors on a

$$(12^*) \qquad V(t) \leqq V(0) = G(u_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty h_3(x)\, dx\,,$$

une constante indépendante de t_0. A l'aide d'un lemme [3, lemma 1.2] il s'ensuit qu'on peut prolonger la solution $u(t)$ de (6) à l'intervalle $0 \leqq t < \infty$ et en employant (5) on obtient l'existence d'une solution globale. Bien entendu les formules (11), (12), (12*) sont valables sur $0 \leqq t < \infty$; d'ailleurs l'hypothèse (3) et (12*) impliquent qu'il existe une constante $k = k(u_0)$ (indépendante de t_0) telle que

$$(13) \qquad |u(t)| \leqq k \qquad (0 \leqq t < \infty)\,.$$

Dès lors on peut aussi montrer qu'il existe une constante k_1 telle que

$$(14) \qquad V''(t) \leqq k_1 \qquad (v \leqq t < \infty)\,,$$

où v est un nombre assez grand. Il s'ensuit de $V(t) \geqq 0$, $V'(t) \leqq 0$ et (14):

(15) $$\lim_{t\to\infty} V'(t) = 0 .$$

Nous montrons (10) en utilisant l'inégalité (facilement montrée)

(16) $$\sup_{-\infty<x<\infty} T^4(x,t) \leqq 4 \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x,t)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} T_x^2(x,t)\,dx .$$

On a de (5)

$$\hat{T}(x,t) = \hat{f}(x)\exp(-x^2 t) + \hat{\eta}(x)\int_0^t g(u(\tau))\exp[-x^2(t-\tau)]\,d\tau$$

et

$$|\hat{T}(x,t)|^2 = \{|\hat{\eta}(x)|^2\gamma^2(x,t) + 2Re\hat{f}(x)\hat{\eta}(-x)\gamma(x,t)$$
$$+ |\hat{f}(x)|^2\}\exp(-2x^2 t) .$$

Une comparaison avec (11), les résultats précédents et (8) donnent:

$$V(0) \geqq V(t) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[h_1(x)\gamma^2(x,t) + h_2(x)\gamma(x,t) +$$
$$+ h_3(x)]\exp(-2x^2 t)\,dx$$

$$\geqq \frac{\Lambda}{2\pi}\int_0^{\infty}[|\hat{\eta}(x)|^2\gamma^2(x,t) + 2\,Re\hat{f}(x)\hat{\eta}(-x)\gamma(x,t)$$

$$+\hat{f}(x)]^2\exp(-2x^2 t)\,dx = \frac{\Lambda}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{T}(x,t)|^2\,dx ;$$

dès lors

(17) $$\int_{-\infty}^{\infty} T^2(x,t)\,dx \leqq \frac{2V(0)}{\Lambda} .$$

Un calcul similaire donne

(18) $$\int_{-\infty}^{\infty} T_x^2(x,t)\,dx \leqq -\frac{V'(t)}{\Lambda} ,$$

et on obtient (10) de (15), (16), (17), (18).

Pour montrer (9) on commence avec le cas $k = 1$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $X > 0$, tel que

$$\int_X^\infty \alpha^2(x)\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{-X} \alpha^2(x)\,dx \leqq \varepsilon\,.$$

Employant l'inégalité de Schwarz et (17) on a:

$$|\int_X^\infty \alpha(x)\,T(x,t)\,dx|^2\,, \quad |\int_{-\infty}^{-X} \alpha(x)\,T(x,t)\,dx|^2 \leqq \frac{2}{\Lambda}\,V(0)\,\varepsilon\,, \quad (0 \leqq t < \infty)\,;$$

et aussi

$$|\int_{-X}^{X} \alpha(x)\,T(x,t)\,dx| \leqq \sup_{-\infty<x<\infty} |T(x,t)|\,\{2X\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\,dx\}^{1/2}$$

Il s'ensuit de la première équation (1) et de (10) (déjà démontrée) qu'il existe un nombre $t_1 = t_1(\varepsilon)$ tel que

$$|u'(t)| = |\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\,T(x,t)\,dx \leqq 3\left[\frac{2}{\Lambda}\,V(0)\,\varepsilon\right]^{1/2} \quad (t_1 \leqq t < \infty)\,;$$

c'est ce qui démontre (9) pour $k = 1$.

En employant le théorème de Parseval dans la première équation de (1), on obtient:

$$u'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(-x)\,\hat{T}(x,t)\,dx$$

et en faisant la différentiation et utilisant la formule pour $\hat{T}_t(x,t)$, on obtient

$$u''(t) + \gamma g(u(t)) = \frac{1}{2\pi}\,I(t) \quad (0 < t < \infty) \tag{19}$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(x)\,\hat{\alpha}(-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty h_1(x)\,dx > 0\,, \tag{20}$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\hat{\alpha}(-x)\,\hat{T}(x,t)\,dx \tag{21}$$

$$= -2\pi\int_{\infty-}^{\infty} \alpha(x)\,T_{xx}(x,t)\,dx \quad (0 \leqq t < \infty)\,.$$

L'estimation (18) donne

$$I^2(t) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \,|\, \hat{\alpha}(-x) \,|^2 \, dx \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \,|\, \hat{T}(x,t) \,|^2 \, dx$$

$$\leqq -\frac{4\pi^2}{\Lambda} V'(t) \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha'(x))^2 \, dx \,,$$

dès lors (15) et $\alpha' \in L_2$ donnent

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 0 \,. \tag{22}$$

Supposons que $u(t) \not\to 0$ quand $t \to \infty$. Puisque u est bornée, il existe un nombre $u^* \neq 0$, $|u^*| \leqq k$ (k définie par (13)) et une suite $\{ t_n \} \to \infty$ quand $n \to \infty$ tels que

$$\lim_{n \to \infty} u(t_n) = u^* \,.$$

Pour fixer les idées, supposons que $u^* > 0$. Par la formule des accroissements finis et (9, $l = 1$), déjà démontrée, on trouve qu'il existe une suite $\Delta_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et un nombre entier $N_1 \geqq 1$ tels que

$$\tfrac{1}{2} u^* \leqq u(t) \leqq k \qquad (t_n \leqq t < t_n + \Delta_n \,, \quad n \geqq N_1) \,.$$

Définissons

$$\mu = \min_{\tfrac{1}{2} u^* \leqq u \leqq k} g(u) > 0 \,,$$

où l'inégalité suit de l'hypothèse $u^* > 0$ et la condition (3) est satisfaite. On a aussi

$$\gamma g(u(t)) \geqq \gamma \mu \qquad (t_n \leqq t \leqq t_n + \Delta_n \,, \quad n \geqq N_1)$$

et, employant (19), (22),

$$u''(t) \leqq -\tfrac{1}{2} \gamma \mu \qquad (t_n \leqq t \leqq t_n + \Delta_n \,, \quad n \geqq N_2) \,,$$

pour un $N_2 \geqq N_1$. Faisant l'intégration de cette inégalité on arrive à

$$u'(t_n + \Delta_n) - u'(t_n) \leqq -\tfrac{1}{2} \nu \pi \Delta_n \qquad (n \geqq N_2) \,,$$

ce qui n'est pas compatible avec $u'(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ et $\Delta_n \to \infty$ quand $n \to \infty$; donc, on conclut que $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$. Employant (19), (22) on obtient $\lim_{t \to \infty} u''(t) = 0$, ce qui démontre (9) et le Théorème 2.

Remarquons que le théorème donne des conditions suffisantes pour la stabilité globale (aussi absolue) de la solution équilibre $u(t) \equiv 0, T(x, t) \equiv 0$ de (1). La condition (8) est satisfaite dans plusieurs cas des réacteurs nucléaires, un cas très simple mais important étant $\alpha(x) = k\,\eta(x)$, $k > 0$ constant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LEVIN, J. J. and J. A. NOHEL, Perturbations of a nonlinear Volterra equation. *Mich. Math.*, *12* (1965), 431-447.

[2] —— and J. A. NOHEL, A system of nonlinear integro-differential equations, *Mich. Math. J.* 13 (1966), 257-270.

[3] NOHEL, J. A., Some problems in nonlinear Volterra integral equations. *Bull. Amer. math. Soc.*, *68*, (1962), 323-9.

[4] LEVIN, J. J. and J. A. NOHEL, On a system of integro-differential equations occuring in reactor dynamics II. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, *11*, (1962), 210-43.

(Reçu le 1er août 1966.)

University of Wisconsin
Madison, Wis.