Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DANS L'ENSEIGNEMENT MODERNE DE LA MATHÉMATIQUE
Autor: Papy, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40744

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ENSEIGNEMENT MODERNE DE LA MATHÉMATIQUE[1]

par G. PAPY

Le programme de l'expérience belge pour les cinq premières années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux vœux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués qui se sont penchés sur le problème de l'enseignement:

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.
2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.
3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter: ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste: *espaces vectoriels.*

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D1]. Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires ?

Gustave CHOQUET a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne !

1) Conférence prononcée au Congrès international des Mathématiciens à Moscou (août 1966).

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires ?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sous-vectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels: il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire, impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de manière plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur la géométrie et le vectoriel euclidien plan.

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de 6e (12-13 ans), j'ai pris une classe de 3e scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amené à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient être consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie !

2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15. Elles embouteillent le cours de

la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.

3. Ensembles, relations, groupes... étant enseignés dès 12-13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils-moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

Classe de sixième (12-13 ans)

(4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte — et ont pris leur temps pour cet enseignement) — ont pu constater, les années ultérieures, que les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient même partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y *voit* les réponses sans *raisonner*. On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de Venn ([MM1], pp. 68-71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM1], pp. 73-75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguésien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'identification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distinguos subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en évidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'identifie le plan Π dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe $\Pi_0, +$ qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démonstrations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de Thalès. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM1], p. 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

Classe de cinquième (13-14 ans)

(4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici, est qu'*il existe au moins une méthode permettant d'introduire ces notions importantes, de manière à la fois rigoureuse et intuitive, à des enfants de 13 à 14 ans.*

Cet enseignement a pu réussir grâce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numérotation de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonné des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1], petit ouvrage destiné aux enseignants, où à [MM2], manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développement du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus en plus les propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de cette structure et se *termine* par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

Classe de quatrième (14-15 ans)

(4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

« La cadre du vectoriel euclidien plan est la voie royale pour l'enseignement de la géométrie. » Encore convient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géométrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sous-entend le choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élémentaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent, théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwartz et inégalité triangulaire.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se *termine* par son utilisation systématique.

Classe de troisième scientifique (15-16 ans)

(7 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la structure de vectoriel, ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de la base:

Si un vectoriel admet une base de n éléments

Alors toute base de ce vectoriel comprend n éléments.

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les substitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2], pp. 32-33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des classes de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure: il est apaisant et réconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de Pythagore. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrième. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de 5^{e} et 4^{e}, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des éléments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'intérêt rebondit ici de manière subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformation dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices $R^{2\times 2}$, $+,.$) et le groupe linéaire général ([A7], ch. 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse: quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire) ? On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connaît déjà: symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux *deux* quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupe des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ (ou corps commutatif).

Une des manières d'*orienter* le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'identifie au nombre complexe $a + bi$. La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation, contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D2] de Jean Dieudonné, écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [MM6] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16-17 ans), la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

1. [A] ARTIN: *Géometric Algebra* (Interscience Publishers, New-York, 1957).
—— *Algèbre Géométrie* (Gauthier-Villars, 1962)
2. [D1] DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis* (Academic Press inc., New-York, 1960).
—— *Fondements de l'Analyse moderne* (Gauthier-Villars, Paris, 1963).
3. [D2] DIEUDONNÉ: *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire* (Herman, Paris, 1964).
4. [G] PAPY: *Groupes* (Presses universitaires de Bruxelles, Bruxelles; Dunod, Paris 1961).
—— *Groups* (Macmillan, London, 1964).
—— *I gruppi* (Feltrinelli Editore, Milano, 1964).
5. [EE] PAPY: *Erste Elementen der Moderne Mathematik* (Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg, 1962-1963).
6. [F1] PAPY-DEBBAUT: *Géométrie affine plane et nombres réels* (Presses universitaires de Bruxelles, Bruxelles; Gauthier-Villars, Paris, 1962).
—— *Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen* (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965).
7. [F2] PAPY: *Initiation aux Espaces vectoriels* (Presses universitaires de Bruxelles Bruxelles; Gauthier-Villars, Paris, 1963).
—— *Einführung in die Vectorraumlehre* (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965).
8. [MM1] PAPY: *Mathématique moderne*, 1 (Editions Didier, Bruxelles-Paris, 1963).
—— *Moderne Wiskunde*, 1 (Didier, Bruxelles-Paris, 1965).
—— *Matematica Moderna*, 1 (Edutura Tineretului, Bucaresti, 1965).
—— *Modern Mathematics*, 1 (Collier-Macmillan, London-New-York, 1965).
9. [MM2] PAPY: *Mathématique moderne*, 2 (Didier, Bruxelles-Paris, 1965).
10. [A7] PAPY (avec la collaboration des Assistants du C.B.P.M.): *Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan* (Centre belge de pédagogie de la Mathématique, 183 avenue Brugmann, Bruxelles 6).
11. [MM6] PAPY: *Géométrie plane (Mathématique moderne, 6)* (Labor, Bruxelles; Nathan, Paris, 1966).
12. [MM3] PAPY: *Mathématique moderne*, 3 *(Et voici Euclide)* (Didier, Bruxelles-Paris, 1966), à paraître.

ARTICLES

13. PAPY: Introduction aux espaces vectoriels (*La math. du 20^{e} siècle*, vol. II, Bruxelles, 1961, 33 pages).
14. —— Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire (*Mathématique moderne*, OCDE, Athènes, 1963).

PAPY: Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna (*Elementos*, nº 9, nov.-dic. 1964, pp. 73-80; nº 10, en.-feb. 1965, pp. 99-104; nº 11, mar.-abr. 1965, pp. 127-130).

—— Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools (*The Mathematics Teacher*, vol. LVIII, nº 4, April 1965, pp. 345-352, nº 5, May 1965, pp. 448-453).

15. PAPY: Comment introduire les notions d'ensembles et de relations *(Publications de l'Unesco)*.

16. PAPY: L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans *(Publications de l'Unesco)*.

G. Papy,
Professeur à la Faculté des Sciences
de l'Université de Bruxelles.

vide-leer-empty