L'INITIATION AUX MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Leray, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40745

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

En hommage à Mlle A.,
dont j'ai recueilli les larmes.
J. L.

L'INITIATION AUX MATHÉMATIQUES

par Jean LERAY

Cette initiation est la mission des enseignements du premier et second degré; mais c'est aux chercheurs qu'il incombe d'en définir le caractère: les principes à respecter, les buts à atteindre, les raisons de réformer non seulement ce qui fut fait jadis, mais aussi ce qui fut récemment tenté. [1])

* * *

L'enseignement doit former en informant, faire découvrir et non professer la vérité. Il ne peut y réussir qu'en faisant revivre à l'esprit de l'enfant les étapes qu'a vécues l'esprit humain, de même que dans sa vie prénatale l'enfant a revécu comme embryon toute l'évolution de l'espèce. Mais il l'a revécue très vite; il fut protozaire quelques instants; il a ressemblé aux espèces primitives, sans jamais cesser d'appartenir à l'espèce humaine.

Son esprit est aussi fermement individualisé que son corps: toute notion qu'on lui impose sommairement, prématurément, sans préliminaires, donc d'autorité restera incomprise; l'enfant apprendra à en parler de façon de plus en plus correcte; mais, en prenant une telle habitude, il deviendra aussi incapable de jamais comprendre vraiment cette notion qu'un enfant « conditionné » [2]) politiquement devient inapte à maîtriser sa foi. Il est, par exemple, dangereux d'habituer un enfant à jouer avec la notion de l'infini, expliquée seulement par quelques points de suspension et quelques « etc. »: Descartes, qui la crut du ressort exclusif de l'intelligence divine, n'osa l'affronter et aborder le calcul différentiel; il fallut Cauchy pour la dominer; seul un esprit libre de préjugés peut accéder à la pensée de Cauchy et à ses aboutissements modernes.

---

1) La première phrase de l'article [4] de G. PAPY se flatte d'exprimer l'avis unanime des mathématiciens purs et appliqués. Cette assertion doit malheureusement être rectifiée. Ce faisant, je tiens à dire la grande estime et la longue amitié que j'ai pour Georges Papy et la vive sympathie que j'éprouve pour tous ceux qui tentent de délivrer l'enseignement de certaines coutumes déplorables.

2) G. Papy [4], p. 2, écrit: « L'enseignement traditionnel avait conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne ». Mon opinion est qu'un enseignement *conditionnant* les élèves, même dans le sens de l'esprit moderne, est nocif.

Le langage savant — par exemple le langage ensembliste — ne doit servir qu'à traiter des sujets ayant quelque intérêt réel; l'employer hors de propos n'est ni faire de la science, ni se préparer à en faire; ce n'est que préciosité ridicule.

Les enseignements du premier et du second degré sont chacun une fin en soi; les mathématiques n'y figurent pas à seule fin de recruter et d'éduquer les futurs mathématiciens; leur exposé ne s'adresse pas à des mathématiciens formés, c'est-à-dire à des explorateurs de l'univers abstrait, mais à des enfants dont les sens sont très éveillés et qu'intéressent surtout les réalités ambiantes.

* * *

Les buts que doit atteindre la classe terminale scientifique de l'enseignement du second degré sont clairs: bien dire que les mathématiques n'établissent aucune vérité absolue, mais que leur objet est de développer les conséquences de propriétés qu'on postule (afin même, parfois, de les prouver contradictoires); apprendre le maniement de quelques notions logiques et ensemblistes, de quelques notions de théorie des fonctions, de quelques notions algébriques et géométriques. Détaillons ces dernières.

En classe terminale, l'élève doit connaître d'autres espaces que l'espace euclidien, qui est celui que ses sens et son professeur de physique lui ont fait découvrir et explorer. A vrai dire ses sens et son professeur de géographie lui ont fait découvrir une géométrie à deux dimensions, qui diffère un peu de la géométrie plane euclidienne: la géométrie sphérique. Hélas ! en France le professeur de mathématiques la méconnaît; il parle de trièdres en omettant de parler de ces triangles sphériques, dont la somme des angles excède deux droits et dont chaque côté est moindre que la somme des deux autres; ce qui prouve que les grands cercles sont les plus courts chemins: ceux que suivent les avions de transport. Deux fois hélas ! il a même négligé la géométrie du cercle: il a lourdement parlé d'angles plans, plutôt que d'arcs de cercle, qu'il est si aisé d'orienter, d'additionner comme des vecteurs libres, de montrer être les images des vecteurs par « l'épimorphisme » de la droite sur le cercle. Lui qui ne craint pas de postuler la notion d'angle, craint-il donc de postuler celle de longueur d'un arc de cercle ? Parce qu'il sait — quant à lui — la définir, il refuse à son enseignement de la postuler: maladroit, que sa science aveugle et paralyse !

Ce ne sont pas ces seuls espaces-là que nos élèves de classe terminale devraient bien connaître, mais surtout les espaces vectoriels, vu leur rôle

en mathématiques pures et appliquées (cf. J. Dieudonné [3]). En fait le rôle le plus fréquent de la structure vectorielle est celle de structure sous-jacente à une structure plus riche; telle est en particulier sa relation avec la structure euclidienne; et cela n'est clair que si cette structure a été correctement axiomatisée.

Le but le plus important de l'enseignement de la géométrie dans le second degré doit donc être de familiariser l'élève avec les notions et propriétés de la géométrie euclidienne, en axiomatisant suffisamment ces notions et propriétés pour que la définition, nécessairement axiomatique, des espaces vectoriels paraisse naturelle et commode. Or cela nécessite un long travail: la notion expérimentale intuitive est celle de groupe des déplacements, jadis déguisée « en cas d'égalité des triangles »; il s'agit de discerner un sous-groupe abélien, invariant, celui des translations; de découvrir ses propriétés, qui constitueront les axiomes par lesquels on définira les espaces vectoriels; d'employer cette définition à donner celle d'espace affine; en munissant l'espace affine d'un produit scalaire d'obtenir enfin la définition axiomatique de l'espace euclidien: on libère ainsi l'élève de sa condition humaine d'être biologiquement euclidien; il possède une vue axiomatique correcte de diverses géométries, basée sur l'axiomatique du corps réel — qu'on peut à volonté postuler ou réduire à celle de l'anneau des entiers —; il est apte à manier, en faculté, les espaces vectoriels, en particulier ces espaces fonctionnels qu'emploient sans cesse les mathématiques contemporaines, la statistique, la physique théorique, etc.

Ce rôle, dont l'enseignement du second degré doit être clairement chargé, n'est pas banal; pour le définir, il ne suffit pas de transcrire dans les programmes du second degré les titres de matières antérieurement au programme des facultés. Ce rôle exige une constante rigueur, ce qui ne signifie pas: tout démontrer; mais ceci: préciser, en employant une terminologie contemporaine, ce qu'on prouve et aussi ce qu'on postule. Dans les classes initiales, on postulera tout ce qui va de soi et on ne donnera que des raisonnements brefs, dont la conclusion est susceptible d'intéresser les élèves — même si elle n'intéresse plus un professeur connaissant trop bien la théorie des covariants et sysygies (cf. Dieudonné [3], page finale) —; on réservera à la classe terminale la synthèse axiomatique qui est le but à atteindre.

* * *

Est-ce à seule fin de moderniser « qu'il faut tuer Euclide », suivant un slogan bien américain, déjà vieux de plus de dix ans ?

C'est en vérité pour une raison plus sérieuse: nous devons initier de plus en plus rapidement la jeunesse à des connaissances de plus en plus poussées; il n'est plus possible de l'attarder longuement à acquérir successivement les techniques des géomètres grecs, puis de la géométrie analytique cartésienne, puis de la géométrie du XIXe siècle, avant de lui révéler la science contemporaine.

Nos élèves ne peuvent comprendre le plus simple système d'axiomes — par exemple celui qui définit les espaces vectoriels — si on leur expose les fondements de la géométrie euclidienne avec les termes qu'employait le remarquable traité d'Hadamard (t. 1, géométrie plane, p. 18): « Théorème: D'un point M on peut mener une perpendiculaire à une droite D. Preuve: Autour de D comme charnière, faisons tourner le demi-plan qui contient M, pour le rabattre... »; or aucune de ces notions de géométrie dans l'espace (charnière, faire tourner, rabattre...) n'est définie dans cette géométrie plane !

Passons à ces traités modernes, dont les pages sont si gaiement coloriées. Que représentent-elles ? si les couleurs ne se chevauchent pas, une partition du plan euclidien; sinon, le produit de ce plan euclidien par l'ensemble des couleurs en jeu. L'emploi des couleurs peut donc être aussi périlleux qu'il est commode; et il oblige à expliquer que l'espace euclidien est incolore !

Mais Euclide n'est-il pas déjà tué et aussi la première tentative qui fut faite de moderniser les mathématiques du premier et du second degré, à savoir y « enseigner la théorie des ensembles » ? Car c'est d'espaces vectoriels qu'on nous parle aujourd'hui.

En fait un rapport existe entre ces deux sujets disparates: ensembles et espaces vectoriels. Certains des espaces vectoriels le plus souvent employés en faculté sont des espaces fonctionnels n'ayant de propriétés simples (par exemple d'être complets) que si les fonctions les constituant sont les plus générales possibles (mesurables); or on ne peut étudier de telles fonctions sans considérer les ensembles mesurables.

Ce saut du coq à l'âne expliqué, l'intérêt des espaces vectoriels et du langage ensembliste confirmé, revenons à ces manuels scolaires, à ces maîtres qui se flattent d'initier nos enfants à « la théorie des ensembles », alors qu'on ne leur a jamais demandé que d'en employer quelques termes fondamentaux, sans tenter de les définir autrement que par l'usage courant.

Cette théorie est la très délicate exploration d'une axiomatique permettant d'employer correctement la notion d'ensemble. Tant qu'on parle d'ensembles de points d'un espace donné, ou plus généralement des sous-ensembles d'un ensemble de base, il n'y a pas de difficulté. Mais on arrive

rapidement à des contradictions dès qu'on jongle sans garde-fou avec des termes tels que « l'ensemble de tous les ensembles ». On peut construire de tels garde-fous, je veux dire une axiomatique éliminant ces contradictions; mais on hésite: « l'axiome de choix », « l'hypothèse du continu » sont-ils vrais ou faux ? Paul Cohen [2] (U.S.A.) a récemment achevé de résoudre ce problème, que K. Gödel avait partiellement résolu: de même qu'il existe plusieurs géométries (la géométrie euclidienne, la géométrie sphérique et la géométrie de Lobatchevsky, qui nie le postulat d'Euclide), de même qu'aucune n'est contradictoire, à moins qu'elles ne le soient toutes (car la sphère appartient à l'espace euclidien, car la géométrie de Lobatchevsky a des représentations appartenant à la géométrie euclidienne), de même il existe plusieurs théories des ensembles (rejetant ou admettant l'axiome de choix, puis rejetant ou admettant l'hypothèse du continu, ...), aucune d'elles n'étant contradictoire, à moins qu'elles ne le soient toutes. Ces théories des ensembles, appelées modèles, sont même en si grand nombre que Sacks [1]) a récemment réussi à simplifier la théorie de Cohen en définissant sur un ensemble de modèles une probabilité, telle que la probabilité qu'un modèle ne vérifie pas l'axiome de choix soit 1; il prouve ainsi l'existence de modèles où cet axiome n'est pas vrai. Ces recherches sont au-delà des mathématiques; peu de mathématiciens étaient jadis avertis des problèmes qu'elles ont résolus; peu d'entre eux aujourd'hui les ont étudiées. Mais l'on parle de plus en plus de la théorie des ensembles.

Par exemple, mon jeune collègue A. de S. entendit récemment, à la réunion hebdomadaire des parents des élèves de l'école maternelle fréquentée par sa fille âgée de 5 ans, la maîtresse annoncer qu'elle allait aborder la théorie des ensembles. Peu après, elle montra à ses bambins un ensemble de livres, un ensemble de crayons de couleurs (si le point euclidien est incolore, il existe des ensembles d'éléments colorés); elle réunit un ensemble d'élèves dans un coin de la classe, en retrancha quelques éléments; mais alors des sanglots éclatèrent, hachant une phrase fort intelligente: « Je ne veux pas être un ensemble ! » La jeune A. craignait, non sans raison, de constituer en fin de compte, dans le coin de la classe, l'ensemble réduit à un élément. Cette initiation mathématique fut incontestablement malheureuse.

Il est certain que beaucoup d'exercices sensoriels, depuis longtemps classiques dans les classes maternelles, s'énoncent commodément en lan-

---

1) Des simplifications analogues ont été trouvées simultanément par D. Scott et R. Solovay. Aucun de ces travaux n'est actuellement imprimé.

gage ensembliste; précisons qu'ils comportent des déplacements de solides et qu'ils enseignent donc aussi des rudiments de géométrie euclidienne. Il est évident qu'il sont plus formateurs que la récitation individuelle, ou le chant en chœur, de ces tables d'addition et de multiplication — que nos enfants savent de plus en plus mal. Le maître doit avoir analysé les aptitudes que son enseignement éveille en ses élèves; il doit déjà parler la langue scientifique (ensemble, réunion, nombre d'éléments...), mais avec cette discrétion qui fit défaut à M. Jourdain, quand il lui fut révélé qu'il parlait en prose.

Revenons à la classe terminale de l'enseignement du second degré en France. L'arithmétique est au programme; il s'agit, entre autres sujets, d'expliquer que tout l'édifice mathématique repose sur quelques axiomes simples et que l'objet de la science mathématique est donc de réduire des propositions fort complexes à un petit nombre de propositions fort claires; ces axiomes sont ceux des entiers positifs et des ensembles finis, deux notions inséparables l'une de l'autre; ils sont justifiés par l'expérience courante et les règles de calcul empiriques qu'en ont dégagées les enseignements maternel et du premier degré.

Hélas ! une axiomatique de l'arithmétique et des ensembles finis évitant l'emploi d'axiomes surabondants entraîne des développements théoriques assez longs; ceux-ci détruisent la simplicité et la clarté que nous exigeons à la base des mathématiques. Une telle axiomatique trop parfaite stupéfie l'élève (voir, par exemple, le manuel [1]), sans cependant satisfaire le mathématicien averti, qui sait quels dangers on court chaque fois qu'on parle d'ensembles non nécessairement finis. Elle doit être évitée.

Répétons-le: l'exposé scientifique des notions ensemblistes se situe bien au-delà des programmes du second degré; celui-ci doit n'appliquer que quelques notions et quelques axiomes ensemblistes, à des structures très simples et bien explicitées; il doit connaître le danger d'abus de langage tels que:

« l'ensemble de tous les ensembles » [1]),

« l'ensemble des propriétés d'un objet » [2]);

il doit être averti qu'ils conduisent à des paradoxes.

* * *

1) Le manuel [1], p. 1, parle d'un ensemble de collections c'est-à-dire d'un ensemble d'ensembles en ignorant ce danger.

2) Le manuel [1], p. 1, donne cet exemple ! Or la classe d'équivalence d'une propriété p d'un objet O est caractérisée par la donnée de l'ensemble P des objets ayant la propriété p. « L'ensemble des classes d'équivalence des propriétés p de l'objet O » est donc l'image bijective de « l'ensemble des ensembles tels que $O \in P$ »; c'est-à-dire l'image bijective de « l'ensemble des ensembles E tels que $O \notin E$ ». Toutes ces notions: « ... » sont donc paradoxales.

En résumé, l'enseignement des mathématiques doit être réformé; en France il doit l'être de la maternelle à l'inspection générale; et cette réforme peut échouer sur trois écueils:

— ignorer les mathématiques qu'emploient les diverses sciences contemporaines;
— établir d'intéressants résultats en voilant les postulats sur lesquels ils se fondent;
— employer un langage moderne et une axiomatique correcte sans rien obtenir qui éveille l'intérêt des élèves.

Les hâtives improvisations, les naïfs enthousiasmes et leurs expériences malheureuses précipitent sur ces écueils, qu'un patient et intelligent travail d'équipe pourra réussir à franchir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CAGNAC, G. et L. THIBERGE, *Mathém. élémentaires*, t. 1, *Arithmétique et algèbre* par Y. CROZES. Masson, 1963 (440 pages !).

[2] COHEN, P. J., The independence of the axiom of choice and the continuum hypothesis. *Congrès international de Moscou*, 1966 (à paraître).

[3] DIEUDONNÉ, J., L'algèbre linéaire dans les mathématiques modernes. *Séminaire d'Echternach, juin 1965; Bulletin de l'Assoc. prof. Math.*, n° 253, juillet 1966.

[4] PAPY, G., La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique. *Congrès international des Mathématiciens de Moscou, 1966. L'Ens. Math.* **12** (1966), p. 225.

(Reçu le 6 décembre 1966.)

Jean LERAY
(Collège de France).