Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE RELATION ENTRE LA DÉRIVABILITÉ A DROITE ET LA CONTINUITÉ

Autor: Busko, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40746

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UNE RELATION ENTRE LA DÉRIVABILITÉ A DROITE ET LA CONTINUITÉ

par E. BUSKO

Le théorème qui va être énoncé permet de résoudre le problème suivant: appelons « primitive à droite » d'une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathfrak{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel topologique E, toute fonction F possédant une dérivée à droite F'_d égale à f (sur I); peut-on trouver simplement toutes les « primitives à droite » connaissant l'une d'elles?

La réponse est affirmative lorsque la topologie de E a de fortes propriétés: étant données deux « primitives à droite » F et G de f, il existe une suite d'intervalles ouverts dont la réunion est dense dans I et sur chacun desquels F et G diffèrent d'une constante.

Il peut se faire qu'aucune « primitive à droite » ne soit continue dans I. Exemple: $I = \mathfrak{R}$, $F(x) = \sin 1/x$ pour $x < 0$ et $F(x) = 0$ pour $x \geqslant 0$; toute « primitive à droite » de $f(x) = F'_d(x)$, continue sur $]-\infty, 0[$ diffère de F, sur cet intervalle, d'une constante, donc n'a pas de limite à gauche au point $x = 0$.

Cependant on a le

THÉORÈME. — *Si la fonction f définie sur l'intervalle $I = [a, b[\subset \mathfrak{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E sur $\mathfrak{R}$, possède une dérivée à droite $f'_d(x)$ pour tout $x \in I$, il existe une suite d'intervalles (I_n) (non réduits à un point), fermés à gauche, dont la réunion est dense dans I et sur chacun desquels f est continue.*

En particulier, si $f'_d(x) = 0$ pour tout $x \in I$, f est constante sur chaque I_n.

Démonstration. 1°) On va démontrer tout d'abord qu'il existe un intervalle ouvert $\subset I$ sur lequel f est continue. Par l'absurde, supposons en effet que f ne soit continue dans aucun sous-intervalle ouvert $\subset I$. Il existe donc un ensemble D dense dans I, en tout point duquel f n'est pas continue. L'hypothèse entraînant la continuité à droite sur I, f n'est pas continue à gauche pour $x \in D$.

Donc, pour tout $x \in D$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $d > 0$, l'intervalle $]x-h/d, x[$ contienne un point $y \in I$ pour lequel $\| f(x) - f(y) \| > h$, de sorte que $\| (f(x)-f(y))/(x-y) \| > d$. La fonction $t \to (f(x)-f(t))/(x-t)$, définie dans I pour $t \neq x$, étant continue à droite au point y, il existe z vérifiant $y < z < x$ tel que pour $y \leqslant t \leqslant z$, on ait $\| (f(x)-f(t))/(x-t) \| > d$. Ceci étant, soit $(d_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels > 0 tendant vers $+\infty$. Fixons $x_0 \in D$; il existe $y_0 \in I$ et $x_1 \in D$ tels que $y_0 < x_1 < x_0$ et que, pour $y_0 \leqslant t \leqslant x_1$, on ait $\| (f(x_0)-f(t))/(x_0-t) \| > d_0$. Puis, partant de $x_1 \in D$, on trouve y_1 et $x_2 \in D$ avec $y_0 < y_1 < x_2 < x_1$ tels que pour $y_1 \leqslant t \leqslant x_2$ on ait $\| (f(x_1)-f(t))/(x_1-t) \| > d_1$, etc. On trouve ainsi par récurrence deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ dans D et $(y_n)_{n \geq 0}$ dans I telles que pour chaque entier $n \geqslant 0$ on ait les inégalités $y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n$ et l'implication

$$(y_n \leqslant t \leqslant x_{n+1}) \Rightarrow \| (f(x_n)-f(t)) / (x_n-t) \| > d_n .$$

Soit $\xi \in I$ la limite de la suite décroissante (x_n). Pour tout $n \geqslant 0$ on a $y_n < \xi < x_{n+1}$, donc $\| (f(x_n)-f(\xi)) / (x_n-\xi) \| > d_n$, de sorte que $\lim_{n \to \infty} \| (f(x_n) - f(\xi)) / (x_n-\xi) \| = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $f'_d(\xi) \in E$.

2°) Soit maintenant ρ la relation définie sur les couples (x, y) de I par: $x \rho y \Leftrightarrow f$ est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités x et y.

On a une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est un intervalle, par définition de ρ, et cet intervalle est fermé à gauche à cause de la continuité à droite. Enfin, la réunion des classes d'équivalence non réduites à un point est dense dans I, en vertu du 1°), et cette réunion est dénombrable, car toute famille d'intervalles de $\mathfrak{R}$, d'intérieur non vide, disjoints deux à deux, est dénombrable.

La deuxième partie du théorème résulte du théorème des accroissements finis (cf. [1], théorème 2 page 22). C.q.f.d.

Remarque. — Ce théorème met en défaut la conclusion de [1], exercice 2 page 27.

La question se pose de savoir si on peut généraliser ce résultat à des espaces localement convexes E (séparés) plus généraux. Il n'en est rien.

En effet, deux cas se présentent: ou bien E admet un voisinage borné, alors sa topologie d'espace localement convexe séparé peut être définie par une norme (cf. [2], ex. 2 p. 11); ou bien E n'admet aucun voisinage borné.

Mais voici un exemple de ce deuxième cas.

Exemple. — Soit $E = \mathfrak{R}^{\mathfrak{N}}$, l'ensemble des suites réelles muni de la topologie produit qui en fait un espace localement convexe séparé; cette topologie est d'ailleurs métrisable (et complète) par la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

où (ϵ_n) est une suite de nombres > 0 telle que $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < +\infty$ (cf. [3]).

Soit $I = [0, 1[$ et supposons les rationnels de $]0, 1[$ rangés en une suite $(r_n)_{n \geq 0}$. Définissons $f : I \to E$ par chacune de ses coordonnées f_n:

$$f_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t < r_n,$$
$$f_n(t) = 1 \quad \text{si} \quad r_n \leqslant t < 1.$$

Alors f admet une dérivée à droite nulle sur I. En effet, chacune des coordonnées f_n admet une dérivée à droite nulle pour tout $x \in I$. Mais f_n n'est pas continue à gauche au point $x = r_n$, donc f non plus: de sorte que f n'est ni continue ni constante dans aucun sous-intervalle de I.

Revenons au problème posé, dans le cas où E est normé: il suffit de trouver toutes les fonctions possédant une dérivée à droite nulle sur I en vertu de l'équivalence

$$f'_d = g'_d \text{ sur } I \Leftrightarrow (f-g)'_d = 0 \text{ sur } I.$$

Voici d'abord un exemple dans la proposition qui suit:

PROPOSITION. — *Pour toute suite (I_n) d'intervalles $\subset I = [a, b[$, disjoints deux à deux, telle que tout intervalle rencontrant deux intervalles distincts I_p et I_q contienne l'extrémité (droite) d'un intervalle I_n ouvert à droite, il existe une fonction $f : \mathfrak{R} \to E$*

a) *constante sur chaque I_n;*

b) *non constante sur la réunion de deux quelconques des I_n;*

c) *de dérivée à droite nulle en tout point;*

d) *telle que l'application $x \to ||f(x)||$ soit croissante.*

Démonstration. — Il suffit de trouver une fonction g numérique $\geqslant 0$ croissante vérifiant a), b) et c), car pour tout $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, la fonction $x \to f(x) = \alpha\, g(x)$ vérifie a), b), c) et d).
Soit $(J_n)_{n \in M}$, $M \subset \mathfrak{N}$, l'ensemble dénombrable des intervalles I_n ouverts à droite. On désigne par a_n l'origine de J_n et b_n son extrémité et on pose, pour $n \in M$,

$$g_n(x) = 0 \qquad \text{lorsque} \quad x < b_n\,,$$
$$g_n(x) = (b_n - a_n)^2 \qquad \text{lorsque} \quad x \geqslant b_n\,.$$

Pour tout $x \in \mathfrak{R}$, la série $\sum\limits_{n \in M} g_n(x) = \sum\limits_{\substack{n \in M: \\ b_n \leq x}} (b_n - a_n)^2$ est convergente, car

$$\sum_{\substack{n \in M: \\ b_n \leq x}} (b_n - a_n)^2 \leqslant (b-a) \sum_{\substack{n \in M: \\ b_n \leq x}} (b_n - a_n) \leqslant (b-a)^2\,.$$

Si $x < y$, on a $g_n(x) \leqslant g_n(y)$ pour chaque $n \in M$, donc $g(x) \leqslant g(y)$; en outre s'il existe $n \in M$ tel que $g_n(x) < g_n(y)$, alors $g(x) < g(y)$. Donc g est $\geqslant 0$, croissante, vérifie a) et b) car l'enveloppe convexe de $I_p \cup I_q$ contient un point b_n : g_n prend sur I_p et I_q deux valeurs distinctes, donc g aussi. Reste à vérifier c). Par construction, g est constante sur tout intervalle $[a_n, b_n[$, donc $g'_d(x) = 0$ pour $x \in J = \bigcup\limits_{n \in M} [a_n, b_n[$. Soit $x \notin J$. S'il existe $h > 0$ tel que $[x, x+h]$ ne rencontre pas J, g est encore constante sur $[x, x+h]$, par construction, donc $g'_d(x) = 0$; sinon, pour $y > x$, on a

$$g(y) - g(x) = \sum_{\substack{n \in M: \\ x < a_n < b_n \leq y}} (b_n - a_n)^2 \leqslant (y-x) \sum_{\substack{n \in M: \\ x < a_n < b_n \leq y}} (b_n - a_n) \leqslant (y-x)^2\,,$$

c'est dire que $g'_d(x) = 0$. C.q.f.d.

Passant au cas général, soit une suite (I_n) d'intervalles $\subset I$, d'origine a_n, d'intérieur non vide, fermés à gauche, disjoints deux à deux, dont la réunion est dense dans I. Pour qu'une fonction constante sur chaque I_n ait une dérivée à droite nulle sur I il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition: pour toute suite décroissante de points a_{n_k} tendant vers un point x, on a $\lim\limits_{k \to \infty} \left(f(a_{n_k}) - f(x)\right) / (a_{n_k} - x) = 0$. Ceci définit toutes les fonctions possédant une dérivée à droite nulle et achève de résoudre le problème proposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle, chap. 1, 2, 3 (1958).
[2] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, chap. 3, 4, 5 (1964).
[3] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932).

(Reçu le 25 novembre 1965)

E. Busko
Résidence Gambetta A.1
91, Yerres (France)

vide-leer-empty