ÉTUDE COMPARÉE DE CERTAINS ANNEAUX COMMUTATIFS

Autor(en): **Lafon, Jean-Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41550

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ÉTUDE COMPARÉE DE CERTAINS ANNEAUX COMMUTATIFS

par Jean-Pierre LAFON, Toulouse

Ceci constitue une rédaction d'un exposé fait à l'IMPA (Rio de Janeiro) le 19 septembre 1967 devant un auditoire d'analystes. Le but n'en est pas de faire des démonstrations complètes de résultats assez classiques mais de montrer qu'il n'y a pas de barrière entre une certaine forme d'algèbre et une certaine forme d'analyse.

I. LE CADRE COMMUN: L'ALGÈBRE LOCALE

Nous nous intéresserons dans la suite à quatre types d'anneaux. Il sera aisé de reconnaître pour ceux-ci la validité de résultats (légèrement) plus généraux énoncés ci-dessous. *Les anneaux sont commutatifs à élément unité.*

On rappelle qu'un anneau A est dit *local* si l'ensemble des éléments non inversibles est un idéal. Cet idéal m est alors l'unique idéal maximal de A. L'anneau quotient A/m est un corps appelé *corps résiduel* de A.

On peut munir l'anneau local A d'une *topologie linéaire* en prenant pour système fondamental de voisinages de a le système des ensembles $a + m^n$ $(n=0, 1, \ldots)$.

Cette topologie est *séparée* si et seulement si $\cap\, m^n = (0)$. Il en sera ainsi, en particulier, si l'anneau A est *noethérien*, i.e. si tout idéal de A (et, en particulier, l'idéal maximal m) a un système fini de générateurs: ceci est un théorème dû à Krull. On en déduit que si $\cap\, m^n$ est différent de (0), *l'anneau A n'est pas noethérien.*

Dans le cas général, l'anneau quotient $A/\cap\, m^n$ muni de la topologie induite, i.e. de sa topologie naturelle d'anneau local est séparé. On l'appelle *le séparé de l'anneau local A*. On peut munir cet anneau séparé d'une *métrique* définissant la topologie d'anneau local: si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ appartiennent à ce séparé, on pose

$d(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ si $\bar{a} = \bar{b}$

$d(\bar{a}, \bar{b}) = e^{-n}$ si $\bar{a} - \bar{b}$ appartient à $m^n / \cap\, m^p$ mais n'appartient pas à $m^{n+1} / \cap\, m^p$.

On peut compléter l'espace métrique sous-jacent à $A/\cap m^n$, obtenant un espace métrique noté $\hat{A}$ qui contient $A/\cap m^n$ comme sous espace partout dense. Le fait que les applications de $(A/\cap m^n)^2$ dans $(A/\cap m^n)$ qui définissent les lois de composition dans $A/\cap m^n$ sont uniformément continues permet de les prolonger par continuité en des applications de $(\hat{A})^2$ dans $\hat{A}$ définissant des lois de composition sur $\hat{A}$. On vérifie que $\hat{A}$ est ainsi muni d'une structure d'anneau local de même corps résiduel que A. Cet anneau local est appelé le *complété séparé de l'anneau local A*.

Si l'idéal maximal m de A est de type fini, on montre que ce complété séparé est *noethérien et d'idéal maximal* $m \,.\, \hat{A}$ (idéal engendré pai m dans $\hat{A}$, i.e. $(m/\cap m^n)\,\hat{A}$.)

Si l'anneau A est noethérien (et, donc, aussi $\hat{A}$), l'anneau $\hat{A}$ est *fidèlement plat sur A :*
ceci peut se traduire sous la forme suivante peut-être plus intuitive pour un non initié: si (1) $\sum_{j=l}^{m} a_{ij}x_j = b_i$ $(i=1, ..., n)$ est un système d'équations linéaires à coefficients dans A, toute solution $(x_j)_j$ dans $\hat{A}^m$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\hat{A}$ de solutions dans A^m.

II. Les exemples les plus importants

Ils sont de quatre type.

1. *Les anneaux de la géométrie algébrique classique*

On considère un corps k et n indéterminées $X_1, ..., X_n$. L'anneau « type » est l'anneau

$$k\,[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$$

des fractions rationnelles

$$\frac{f(X_1, \ldots, X_n)}{g\,(X_1, \ldots, X_n} \qquad \text{où} f(X_1, \ldots, X_n) \text{ et } g\,(X_1, \ldots, X_n)$$

sont des polynômes tels que $g\,(0, ..., 0)$ soit non nul.

Si k est le corps des réels ou le corps des complexes (ou tout autre corps valué complet non discret ou topologique), cet anneau s'identifie à *l'anneau des germes de fonctions rationnelles au voisinage* de 0 dans k^n (muni de la topologie produit). Dans le cas général, on peut munir k^n d'une topologie moins fine que la topologie naturelle mais rendant les mêmes services.

Les anneaux de la géométrie algébrique classique sont les quotients de ces anneaux. Ils sont locaux de corps résiduel k.

2. *Les anneaux de la géométrie formelle*

Il s'agit ici d'un point de vue purement algébrique, aucun point de vue fonctionnel ne pouvant être développé.

L'anneau type est l'anneau $k[[X_1, ..., X_n]]$ des séries formelles à coefficients dans le corps k en les indéterminées $X_1, ..., X_n$. C'est un anneau *local*, car une série formelle est inversible si et seulement si son terme constant est non nul, de corps résiduel k, et *complet*. On vérifie qu'il est le complété de l'anneau type précédent. Les anneaux locaux qui interviennent en géométrie formelle sont les anneaux quotients des anneaux types. Il est possible de les caractériser intrinsèquement comme les anneaux locaux complets de corps résiduel k admettant un sous-corps isomorphe à k et noethériens.

3. *Les anneaux de la géométrie analytique*

Le corps k est valué complet non discret (plus précisément tel que la valuation définisse une topologie non discrète): par exemple, le corps $\mathbf{R}$ des réels, le corps $\mathbf{C}$ des complexes ou le corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques.

On note $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ le sous-anneau de $k[[X_1, ..., X_n]]$ des séries convergentes, i.e. des séries $\sum a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ pour lesquelles on peut trouver deux nombres positifs h et M tels que

$$| a_{i_1 \dots i_n} | \leqslant M h^{i_1 + \dots + i_n}$$

(M et h dépendant de la série).

C'est aussi un anneau local de corps résiduel k et dont le complété est l'anneau $k[[X_1, ..., X_n]]$ des séries formelles.

Les anneaux locaux de la géométrie analytique sont les quotients d'anneaux de ce type. Ils sont appelés *k-algèbres analytiques*.

On remarque que l'anneau $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ s'identifie à *l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de* 0 *dans* k^n (à un germe de fonction analytique on fait correspondre sa série de Taylor).

4. *Les anneaux locaux de la géométrie différentielle*

Ici le corps de base est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. On désigne (avec B. Malgrange) par $\mathscr{E}_n$ l'anneau des germes de fonctions de classe C^∞ au voisinage de 0 de k^n. A un tel germe il est possible de faire correspondre sa

série de Taylor formelle: si $\bar{f}$ est un tel germe, on note f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de 0 dans k^n représentant $\bar{f}$ et on définit

$$\frac{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}{\partial^{i_1+\dots+i_n}} \bar{f}(0)$$

comme la dérivée correspondante à l'origine de f; la série de Taylor formelle de $\bar{f}$ est la série

$$\sum \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}}{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}} \bar{f}(0) \frac{X_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{X_n^{i_n}}{i_n!}$$

Un théorème classique d'E. Borel affirme que l'homomorphisme ainsi défini de $\mathscr{E}_n$ dans l'anneau $k[[X_1, \dots, X_n]]$ est *surjectif*.

Comme l'anneau $k[[X_1, \dots, X_n]]$ est complet, on voit qu'il est le séparé complété de $\mathscr{E}_n$.

Le noyau de l'homomorphisme surjectif $\mathscr{E}_n \to k[[X_1, \dots, X_n]]$ est l'idéal des germes de *fonctions plates* (exemple, en une variable, $x \to x^k e^{-1/x^2}$). Si m est l'idéal maximal de $\mathscr{E}_n$, ce noyau est, évidemment, $\cap\, m^n$. *L'anneau $\mathscr{E}_n$ n'est donc pas noethérien.* Toutefois, l'idéal m est *de type fini* engendré par les germes des fonctions coordonnées. Les quotients des anneaux $\mathscr{E}_n$ sont appelés *algèbres différentiables*.

III. Théorème de préparation: Weierstrass. Malgrange

Cas formel.

Une série $f(X_1, \dots, X_n) \in k[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ est dite *régulière d'ordre s en X_n* si, en l'ordonnant par rapport à X_n, $f(X_1, \dots, X_n) = f_0(X_1, \dots, X_{n-1}) + \dots + f_{s-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^{s-1} + f_s(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^s + \dots$, les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\begin{cases} f_0(0, \dots, 0) = \dots = f_{s-1}(0, \dots, 0) = 0 \\ f_s(0, \dots, 0) \neq 0 \end{cases}$$

Si le corps k est de caractéristique 0 ou si $s = 1$ ceci se traduit par les conditions:

$$f(0, \dots, 0) = \dots = \frac{\partial^{s-1} f}{\partial X_n^{s-1}}(0, \dots, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^s f}{\partial X_n^s}(0, \dots, 0) \neq 0$$

Il y a lieu de remarquer que *toute série formelle peut être rendue régulière par un automorphisme de la k-algèbre* $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$: si $f_s(X_1, ..., X_n)$ est la partie homogène de plus bas degré de la série f, ou bien $X_1, ..., X_{n-1}$ ne figurent pas dans $f_s(X_1, ..., X_n)$ et f est régulière d'ordre s en X_n ou bien l'un d'entre eux y figure et si le corps k est infini (c'est le cas qui nous intéresse), on peut trouver $a_1, ..., a_{n-1}$ dans k en sorte que $f_s(a_1, ..., a_{n-1}, 1)$ soit non nul. L'automorphisme défini par

$$X_i \to X_i + a_i X_n \qquad (i = 1, ..., n-1)$$

$$X_n \to X_n$$

transforme f en une série régulière d'ordre s en X_n.

Le théorème de préparation affirme que si f est régulière d'ordre s en X_n et si $g \in k[\![X_1, ..., X_n]\!]$, il existe deux séries q et $r \in k[\![X_1, ..., X_n]\!]$ telles que

$g = qf + r$

r soit un polynôme de degré au plus $s-1$ en X_n à coefficients dans $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]$. De plus, *$q$ et r sont uniquement déterminés par ces conditions.*

Appliquant au cas où $g = X_n^s$, on obtient l'égalité $X_n^s - r = qf$. On vérifie par un calcul facile sur les coefficients de X_n^i que la série q est *inversible* et que le premier membre est un *polynôme unitaire de degré s en X_n, les coefficients des termes de degré strictement inférieur à s s'annulant pour* $X_1 = ... = X_{n-1} = 0$. Un tel polynôme est dit *distingué.*

Ainsi, *une série régulière d'ordre s en X_n est associée à un polynôme distingué de degré s* (en X_n).

Cas analytique.

Tous les résultats précédents restent valables en remplaçant séries formelles par séries convergentes: preuve par la méthode des fonctions majorantes ou par une méthode de même nature.

Cas algébrique.

Un théorème de préparation n'est plus valable dans ce cas. Nous verrons même qu'une forme plus faible n'est pas valable *(théorème des fonctions implicites).*

Cas différentiable.

Un germe $\in \mathscr{E}_n$ est dit *régulier d'ordre s en la n-ème variable* si sa série de Taylor formelle l'est en X_n: cette condition se traduit donc au moyen des dérivées partielles par rapport à X_n comme dans le cas formel.

Si $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont des éléments de $\mathscr{E}_n$ tels que $\bar{f}$ soit régulier d'ordre s par rapport à la n-ème variable, on peut trouver des éléments $\bar{q}$ et $\bar{r}$ de $\mathscr{E}_n$ tels que

$$\bar{g} = \bar{q}\bar{f} + \bar{r}$$

et que $\bar{r}$ soit le germe d'une fonction de classe C^∞ polynômiale par rapport à la n-ème variable.

Ce théorème est dû à *Malgrange*. Il faut indiquer que dans ce cas $\bar{q}$ et $\bar{r}$ *ne sont plus déterminés de manière unique* par les conditions ci-dessus.

Il existe d'autres formes du théorème de préparation équivalentes à cette forme classique mais présentant, en particulier, l'avantage de faire intervenir non seulement les anneaux types mais aussi leurs anneaux quotients (algèbres analytiques, algèbres différentiables). Disons un peu brièvement qu'un homomorphisme $\varphi : A \to B$ d'anneaux locaux est *quasi-fini* s'il est *local* i.e. applique l'idéal maximal de A dans celui de B, et si son prolongement $\hat{\varphi}$ aux complétés séparés $\hat{A} \to \hat{B}$ est *fini*, i.e. munit $\hat{B}$ d'une structure de $\hat{A}$-module de type fini. Une forme du théorème de préparation différentiable (resp. analytique) affirme que si A et B sont des algèbres différentiables (resp. analytiques), un homomorphisme quasi-fini est fini.

IV. Un cas particulier important: Le théoreme des fonctions implicites

Le lemme de Hensel.

Le théorème des fonctions implicites pour une équation (mais il serait facile de traiter le cas général) est un cas particulier du théorème de préparation. Soit $f(X_1, ..., X_n)$ une série formelle ou convergente régulière d'ordre 1 en X_n. Son polynôme distingué est de la forme $X_n - g(X_1, ..., X_{n-1})$ où $g(X_1, ..., X_{n-1})$ est un élément de $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]$ ou $k\{\{X_1, ..., X_{n-1}\}\}$ tel que $g(0, ..., 0) = 0$.

On peut donc substituer $g(X_1, ..., X_{n-1})$ à X_n dans $f(X_1, ..., X_n)$ obtenant l'égalité

$$f(X_1, ..., X_{n-1}, g(X_1, ..., X_{n-1})) = 0$$

D'autre part, l'hypothèse faite sur f correspond bien à celle du théorème des fonctions implicites

$$f(0, ..., 0) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial X_n}(0, ..., 0) \neq 0\,.$$

La situation est analogue dans l'anneau $\mathscr{E}_n$, l'unicité qui n'était pas assurée dans le cas général du théorème de préparation (en raison de l'exis-

tence de racines multiples du polynôme distingué) l'étant évidemment dans ce cas particulier. — Il y a lieu de remarquer au contraire *la non validité d'un théorème des fonctions implicites dans l'anneau* $k\,[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$, et donc, a fortiori, la *non validité d'un théorème de préparation.* (Si, dans le cas diffé rentiable, on a « trop » de fonctions, ce qui fait perdre l'unicité, dans le cas algébrique, on n'en a plus assez).

Par exemple, soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ et considérons

$$f(X_1, X_2) = X_1 - 2X_2 + X_2^2$$

C'est une série formelle régulière d'ordre 1 en X_2. La série $g\,(X_1)$ telle que $g\,(0) = 0$ et $f\big(X_1; g\,(X_1)\big) = 0$ est $1 - (1 - X_1)^{1/2}$, étant entendu que l'on développe suivant la formule du binôme. Il est clair qu'elle n'appartient pas à l'anneau $k\,[X_1, X_2]_{(X_1, X_2)}$.

Lemme de Hensel.

Un anneau local A est dit hensélien si tout polynôme de la forme :

$$a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$$

où a_0 appartient à m, idéal maximal de A, et a_1 n'appartient pas à m, a une racine dans m.

Il est clair que *les anneaux* $k\,[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, $k\,\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ (si k est valué complet non discret), $\mathscr{E}_n$ *sont henséliens* en raison de la validité d'un théorème des fonctions implicites dans respectivement $k\,[\![X_1, \ldots, X_n, X]\!]$, $k\,\{\{X_1, \ldots, X_n, X\}\}$, $\mathscr{E}_{n+1}$.
Par contre, *l'anneau* $k\,[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ *n'est pas hensélien.*

V. *Propriétés algébriques classiques*

1. *Noethérianité.*

Il est facile de prouver à partir du fait que *l'anneau* $k\,[X_1, \ldots, X_n]$ *est noethérien* (théorème de Hilbert) qu'il en est de même de l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$. En fait, un idéal de ce dernier est engendré par un idéal de $k\,[X_1, \ldots, X_n]$. *L'anneau* $\mathscr{E}_n$ lui *n'est pas noethérien,* en raison de l'existence des fonctions plates, car il ne satisfait pas au théorème de Krull $\cap\, m^n = (0)$.

On déduit classiquement du théorème de préparation le fait que les anneaux $k\,[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ et $k\,\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ (k corps valué complet non discret) sont noethériens. Voici l'idée de la preuve pour $k\,[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, la preuve pour $k\,\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ étant analogue: Soit a un idéal de k

$[\![X_1, ..., X_n]\!]$. S'il est (0), il est de type fini. Sinon, soit f un élément non nul de a. Quitte à lui appliquer un k-automorphisme de $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$, on peut le supposer régulier en X_n. Dès lors, $k[\![X_1, ..., X_n]\!]/(f)$ est un module de type fini sur l'anneau $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]/k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!] \cap (f)$. Il suffit alors de procéder par récurrence, supposant $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]$ noethérien. Il en va de même de l'anneau quotient $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]/k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!] \cap (f)$ et donc du module de type fini $k[\![X_1, ..., X_n]\!]/(f)$. Ceci signifie que tout sous-module est de type fini. Donc, en particulier, $a/(f)$ est de type fini. Par conséquent, l'idéal a est de type fini. — Rappelons que tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien. Donc, *les anneaux locaux de la géométrie algébrique, analytique, formelle sont noethériens.*

La preuve ci-dessus échoue en ce qui concerne l'anneau $\mathscr{E}_n$ car la notion de germe plat est « intrinsèque » et si f est un tel germe, il n'est pas possible de trouver un automorphisme de $\mathscr{E}_n$ le rendant régulier.

2. *Factorialité.*

Un anneau *intègre* A est dit *factoriel* si tout élément est, de manière unique (en un sens évident), produit d'éléments irréductibles. Cette notion ne se conserve, évidemment, pas par passage au quotient.

La factorialité bien connue (théorème de Gauss) de l'anneau $k[X_1, ..., X_n]$ implique celle de l'anneau $k[X_1,...,X_n]_{(X_1,...,X_n)}$. Elle résulte aussi du fait que l'origine (0, ..., 0) est un point simple de k^n muni de sa structure de variété algébrique.

Par contre, *l'anneau $\mathscr{E}_n$ n'est pas factoriel*: c'est ainsi, que dans $\mathscr{E}_1$, le germe de la fonction plate $x \to e^{-1/x^2}$ est divisible par le germe de x^n pour n entier $\geqq 0$ quelconque.

D'ailleurs l'anneau $\mathscr{E}_1$ n'est *pas intègre* comme on le voit aisément en considérant les germes des fonctions f et g définies sur R par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ e^{-1/x^2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Les anneaux $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$ et $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ (k valué complet non discret) *sont factoriels :* là, encore, la preuve se fait par récurrence sur n au moyen du théorème de préparation. Comme il s'agit d'anneaux noethériens intègres, l'existence d'une décomposition en facteurs irréductibles est assurée. Il reste à prouver l'unicité et, à cet effet, *qu'un élément irréductible*

engendre un idéal premier. Or, si f est un tel élément, on peut le supposer régulier en X_n (quitte à appliquer un automorphisme). Il suffit alors de prouver que le polynôme distingué associé engendre un idéal premier dans $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!][X_n]$ ou $k\{\{X_1, ..., X_{n-1}\}\}[X_n]$ mais ceci est assuré par la factorialité de $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]$ ou $k\{\{X_1, ..., X_{n-1}\}\}$ et donc des anneaux de polynômes en X_n sur ceux-ci.

V. Autres résultats

D'autres points de comparaison sont possibles. Citons en quelques-uns:

Un idéal premier p de l'anneau $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ *le reste dans son complété* $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$ (k corps valué complet non discret). Nous ne le prouverons pas.

Il n'en est plus de même pour un idéal premier p de l'anneau $k[X_1, ..., X_n]$ en général. C'est ainsi que le polynôme $X_1 X_2 - (X_1 + X_2)(X_1^2 + X_2^2)$ étant irréductible dans $k[X_1, X_2]$ engendre un idéal premier dans $k[X_1, X_{2(X_1, X_2)}$. Mais, il se décompose dans l'anneau $k[\![X_1, X_2]\!]$ en $(X_1 + r(X_1, X_2))$ $(X_2 + s(X_1, X_2))$ où r et s sont des séries formelles d'ordre supérieur à 2 et il engendre donc un idéal qui n'est plus premier dans $k[\![X_1, X_2]\!]$ mais qui est intersection de deux idéaux premiers, correspondants aux deux branches formelles (ou analytiques) de la courbe algébrique d'équation $X_1 X_2 - (X_1 + X_2)(X_1^2 + X_2^2) = 0$ (« strophoïde »).

Une étude plus générale de ce genre de situation est faite par M. Nagata sous la rubrique: Weierstrassean Rings (Local Rings. Interscience Publishers; 1962).

Le problème correspondant dans $\mathscr{E}_n$ consiste à passer au quotient par l'idéal des germes de fonctions plates. Dans ce passage, un idéal premier donne un idéal premier du (complété) séparé.

On pourrait aussi étudier des théorèmes de cohérence du type théorème de cohérence d'Oka dans la catégorie des espaces analytiques.

Signalons pour finir *un joli résultat dû à A'Campo* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 46, 1967, pp. 279-298) parmi d'autres résultats du même auteur.

On considère une n-suite $(M_{i_1 \cdots i_n})$ de nombres réels positifs et le sous-ensemble de $\mathbf{R}[\![X_1, ..., X_n]\!]$ des séries $\sum a_{i_1 \cdots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ pour lesquelles on peut trouver un nombre réel positif h tel que

$$| a_{i_1 \ldots i_n} < h^{i_1 + \ldots + i_n} M_{i_1 \ldots i_n}$$

Sous des hypothèses de convexité évidentes sur la n-suite, on obtient un sous-anneau. *La validité d'un théorème de préparation dans ce sous-anneau implique que l'anneau est l'anneau des séries convergentes*, correspondant au cas où $M_{i_1 \cdots i_n}$ est constant.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

MALGRANGE, B. *Le théorème de préparation en géométrie différentiable*, Séminaire Cartan, 15 (1962/1963), exposés 11, 12, 13, 22.

NAGATA, M. *Local Rings*. Interscience Publishers.

ZARISKI-SAMUEL. *Commutative Algebra II*. Van Nostrand.

(Reçu le 1er juin 1968)

J. P. Lafon
Faculté des Sciences de Toulouse