§3. — Propriétés élémentaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tion $X_i \to x_i$, de sorte que l'élément $h_1(x_1) \dots h_1(x_2)$ est racine de p_ϕ, et comme il a pour reste $\bar{e}$, il est nécessairement égal à e. Compte tenu des relations $P'(V) V_i(V) = T_i$, $P'(V) C_i(V) = U_i$, on voit alors que la décomposition $f = gh$ n'est autre que celle obtenue par l'identité (2), ce qui en montre l'unicité.

Remarque. — Si ϕ possède la propriété ci-dessus, il en est de même de tout élément $\phi\theta$, où $\bar{\theta}$ est inversible.

Définition. — Un couple vérifiant les conditions de la proposition 1 (resp. 2) sera dit faiblement hensélien (resp. hensélien).

Remarque. — Nous ne gardons pas ici les définitions de J.P. Lafon mais nous allons voir ci-dessous que dans les cas usuels les notions coïncident.

§ 3. — Propriétés élémentaires

1. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple tel que $\mathscr{A}$ soit contenu dans le radical (de Jacobson) ou intersection des idéaux maximaux de A (il revient au même de dire qu'un élément de A est inversible dès que son reste l'est. Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien, alors il est hensélien. On retrouve alors la définition de Lafon.

Tout d'abord les éléments ϕ intervenant dans les énoncés des propositions peuvent être choisis égaux à 1. Il reste à voir l'unicité de la décomposition de f sous les hypothèses de (1) prop. 2. La démonstration faite dans le cas local dans [1] s'étend sans modification:

Si $f = gh = g_1h_1$ avec $\bar{g} = \bar{g}_1$, $\bar{h} = \bar{h}_1$, g et h_1 ont un résultant inversible puisqu'il en est de même de leur reste. Il existe alors $u, v \in A[X]$ tels que $ug + vh_1 = 1$, soit $ugh + vh_1h = h$, d'où $(ug_1 + vh)\, h_1 = h$; le polynôme h_1 divise h; de même h divise h_1; ces polynômes étant unitaires, on a $h = h_1$ et de même, $g = g_1$.

2. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple et $\phi \in A$ de reste inversible; les éléments de A_ϕ de reste nul forment l'idéal $\mathscr{A}_\phi$ des fractions $a/\mathscr{A}_\phi{}^p$ où $a \in \mathscr{A}$, $p \in N$.

Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien ou hensélien, il en est de même de $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$.

Supposons $(A, \mathscr{A})$ faiblement hensélien, et soit $p(V) = V^k - b_1V^{k-1} - \dots - b_k$ un polynôme sur A_ϕ où $\bar{b}_1$ est inversible et où $b_1, \dots, b_k \in \mathscr{A}_\phi$. En prenant l'entier m assez grand, on peut écrire

$$p(V) = V^k - \frac{a}{\phi^m} V^{k-1} - \dots - \frac{a_k}{\phi^{km}}$$

où $a_1 \in A$ a un reste inversible et où $a_2, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$. Supposons que $p(V)$ a une racine simple $\bar{e}$ dans $\bar{A}$, mais alors, il existe ψ tel que $W^k - a_1 W^{k-1} - \ldots - a_k$ ait une racine simple dans A_ψ, de reste $\bar{e}$, et par suite, l'image de $p(V)$ dans $A_{\phi\psi}$ a une racine simple, de reste $\bar{e}$. $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est donc faiblement hensélien. On laisse au lecteur le soin de voir que $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est hensélien si $(A, \mathscr{A})$ l'est.

3. — On considère la catégorie (Cou) dont les objets sont les couples $(A, \mathscr{A})$ d'un anneau A et d'un idéal $\mathscr{A}$ de A, un morphisme $u : (A, \mathscr{A}) \to (B, \mathscr{L})$ étant un homomorphisme $u: A \to B$ d'anneaux tel que $u^{-1}(\mathscr{L}) = \mathscr{A}$. On sait alors [2] que si $((A_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}\, u_{ij})$ est un système inductif dans (Cou) indexé par un ensemble I filtrant, il a une limite inductive $(A, \mathscr{A})$ dans (Cou) où A est la limite inductive des A_i dans la catégorie des anneaux et où $\mathscr{A}$ est la limite inductive des idéaux $\mathscr{A}_i$. Si, de plus, les couples $(A_i, \mathscr{A}_i)$ sont faiblement henséliens, ou henséliens, il en est de même de $(A, \mathscr{A})$ [On adapte sans difficulté la démonstration de Lafon aux définitions ci-dessus].

4. — En particulier, si $(A, \mathscr{A})$ est un couple faiblement hensélien, on considère le système inductif filtrant des $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ où ϕ parcourt la partie multiplicative S de A formée des éléments inversibles modulo $\mathscr{A}$, alors sa limite inductive $(A_S, \mathscr{A}_S)$ sera faiblement hensélienne, et même hensélienne, puisque $\mathscr{A}_S$ est contenu dans le radical de A_S.

Cela entraîne en particulier que si $f_\phi = gh$ et $f_\psi = g_1 h_1$ sont deux décompositions d'un polynôme $f \in A\,[X]$ dans A_ϕ et A_ψ respectivement et vérifiant les hypothèses de (1), prop. 1, alors, en prenant θ « assez grand » de reste inversible, ces deux décompositions ont la même image dans A_θ, ce que l'on aurait pu voir directement.

En résumé, dire que $(A_S, \mathscr{A}_S)$ est hensélien équivaut à dire que $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien. On reconnaît une généralisation de [1] chap. VII prop. 43; 2). Nous rappelons que pour Nagata, un anneau local A, d'idéal maximal $\mathscr{M}$ est hensélien si le couple $(A, \mathscr{M})$ est faiblement hensélien au sens où nous l'entendons ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NAGATA, M. *Local rings*. Interscience Publishers.
[2] LAFON, J. P. *Anneaux henséliens*. Bull. Soc. Math. France (1964).
[3] ARTIN, M. *Grothendieck Topologies*. Harvard University (1962).

E. Crépeaux
Faculté des Sciences de Lille

(Reçu le 1er juin 1968)