IV

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\int_a^b U''_{xx_1}(t, t)\, dt = 0$$

[alors que $U''_{xx_1}(t, t_1)$ est une fonction mesurable de deux variables dont l'intégrale sur la ligne $t = t_1$ ne peut jouer aucun rôle]. En réalité, comme cela résulte des travaux de Gâteaux et des miens, l'équation de Laplace généralisée est

$$\int_a^b U''_{x^2}(t) = 0 \tag{8}$$

Ces travaux, comme ceux de Gâteaux et de M. Fréchet qui ont étudié les solutions de l'équation $U''_{x^2} = 0$ auxquelles s'appliquent les formules de Volterra, apparaissent un peu comme des développements de la courte note d'Hadamard (*Bull. Soc. math.*, *30*, 1902, pp. 40-43).

IV

Si Hadamard s'intéressait aux théories générales (il s'est en particulier beaucoup intéressé à l'analyse générale de Fréchet et Moore), cela ne l'empêchait pas d'attacher une grande importance aux applications. Dans sa notice de 1912, il fait remarquer que, dans ses travaux sur les fonctions entières, il s'était déjà inspiré des principes du calcul fonctionnel: il avait en effet étudié les relations entre trois fonctions, celle qui caractérise la croissance d'une fonction entière, celle qui définit la décroissance des coefficients de la série entière qui la représente, et celle qui définit le nombre de ses zéros de modules $\leqq r$. Mais en 1907, un sujet mis au concours par l'Académie, l'étude de l'équilibre des plaques élastiques encastrées, lui donna l'occasion d'appliquer plus précisément les idées de Volterra, en considérant les fonctions de Green comme fonctions du contour. On sait que ces fonctions dépendent, dans le cas du plan, d'un contour C et de deux points intérieurs A et B. Il en considéra spécialement trois: la fonction de Green proprement dite, $g(A, B)$, relative à l'équation de Laplace et au problème de Dirichlet; la fonction de Neumann $\gamma(A, B)$, relative à la même équation de Neumann; enfin la fonction de Green d'ordre deux, $G(A, B)$, dont dépend l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Il dut d'abord préciser la définition de $\gamma(A, B)$ que Neumann n'avait, pour chaque A fixe, défini qu'à une constante près. Il put le faire de manière que cette fonction soit, comme les deux autres, symétrique en A et B. Supposant

le contour C rectifiable, de sorte qu'un point M de C peut être défini par son abscisse curviligne s, et définissant la déformation du contour par le déplacement δn de M, supposé normal à C et compté positivement vers l'intérieur, il obtint les équations

$$\delta g(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg(A, M)}{dn} \frac{dg(M, B)}{dn} \delta n ds, \tag{9}$$

$$\delta \gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{d\gamma(A, M)}{ds} \frac{d\gamma(M, B)}{ds} + \frac{1}{lR}[\gamma(A, M) + \gamma(M, B)] - \frac{1}{l^2} \right\} \delta n ds, \tag{10}$$

$$\delta G(A, B) = \frac{1}{8\pi} \int_C \Delta_M G(A, M) \Delta_M G(M, B) \delta n ds, \tag{11}$$

$2\pi\, l$ désignant la longueur C du contour et R son rayon de courbure en M. Il fit remarquer que, si δn est de signe constant, ces formules entraînent l'inégalité

$$[\delta g(A, B)]^2 \leqq \delta g(A, A)\, \delta g(B, B)$$

et des inégalités analogues relatives à $\gamma(A, B)$ et $G(A, B)$. Il indiqua aussi l'extension de ces formules au cas de l'espace. Il montra ensuite que ces trois équations se ramènent à la forme unique

$$\delta \psi(A, B) = \int_C \psi(A, M) \psi(M, B) \delta n ds. \tag{12}$$

Il suffit en effet de poser

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(A, B) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 g(A, B)}{dn_A\, dn_B}, \quad \psi_2(A, B) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 \gamma(A, B)}{ds_A\, ds_B}, \\ \psi_3(A, B) &= \frac{1}{8\pi} \Delta_A \Delta_B G(A, B) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

pour avoir trois solutions de l'équation (12). Les deux premières n'ont d'ailleurs de sens que si on se borne à considérer une famille particulière de contours se rétrécissant à partir de C, de manière que les symboles $\frac{d}{ds}$ et $\frac{d}{dn}$ aient un sens aux points A et B. J'ai fait remarquer ultérieurement que, pour $g(A, B)$, on évite cet inconvénient en considérant le tenseur

$$T_1(A, B) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad}_A \operatorname{grad}_B g(A, B), \tag{14}$$

qui est bien défini sans qu'on ait à choisir des directions en A et en B, et vérifie une équation analogue à l'équation (12).

Dans sa notice de 1912, Hadamard a bien voulu rappeler que j'ai indiqué dans ma thèse ce qu'il appelle la raison profonde du fait que la même équation (12) se rencontre ainsi dans trois problèmes distincts: c'est qu'elle est presque la seule qui soit complètement intégrable. D'une manière précise, si une équation de la forme

$$\delta\psi(A, B) = \int_c f[\psi(A, B), \psi(A, M), \psi(M, B), A, B, M]\, \delta n ds \tag{15}$$

est complètement intégrable, un changement de la fonctionnelle inconnue la ramène à la forme (12). Si j'ai rappelé ce résultat, c'est pour dire une fois de plus ce que je dois à Hadamard. Quant à la fin de l'année scolaire 1909-1910, ayant suivi son cours au Collège de France, je lui fis observer qu'il n'avait pas soulevé le problème de l'intégrabilité des équations (9) à (12), il me répondit qu'il avait l'intention de l'étudier, mais que, puisque j'en avais eu l'idée, il me laissait le champ libre. Il m'abandonnait ainsi un magnifique sujet de recherches, qui devint celui de ma thèse.

V

Le calcul des variations, qui avait eu un grand développement bien avant les travaux de Volterra, apparaît aujourd'hui comme un chapitre du calcul fonctionnel, celui où l'on étudie les maximums et minimums des fonctionnelles. Mais les précurseurs, et notamment Euler et Lagrange, n'avaient considéré que des fonctionnelles particulières, représentables par des intégrales telles que

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

ou des intégrales plus générales (simples ou multiples) où peuvent figurer des dérivées d'ordres plus élevés de la fonction inconnue (d'une ou plusieurs variables). Euler avait formé une équation différentielle qui, jointe à des conditions aux limites, donne en principe la fonction qui réalise l'extremum cherché. Mais leurs théories manquaient de rigueur. La recherche des