A. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE, PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE

par Bruno V. SCHMITT

A. INTRODUCTION

Nous reprenons ici, sous le nom d'index, une notion qui a été introduite d'une autre manière, sous le nom de « rotation number », par H. Seifert [1].

Etant donné un système différentiel d'ordre 2, à coefficients périodiques de période p, de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

à tout point x^0 du plan, nous associons un index $i(x^0) \in \mathbf{Z}$ qui a les propriétés suivantes:

1. L'index $i(x^0)$ est défini si et seulement s'il ne passe pas de solution de période p par le point x^0.

2. Si en x^0 et en y^0 distincts, les index sont différents, alors sur tout chemin continu joignant x^0 à y^0, il existe un point z^0 par lequel passe au moins une solution de période p.

Dans cet article nous limitons notre étude aux systèmes différentiels périodiques linéaires. Les résultats peuvent être résumés ainsi: soit

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{2}$$

le système différentiel linéaire, réel, d'ordre 2, de période p. Soit $x(t, t_0, x^0)$ la trajectoire de (2) telle que $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$. Soit $\mathscr{C}$ l'application linéaire, du plan dans le plan, de matrice $C(0)$, (C. II 1°), définie par $\mathscr{C}(x^o) = x(p, 0, x^0)$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\mathscr{C}$.

1° si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) \neq 0$, la seule trajectoire de période p est $x(t) = 0$, l'index du système (2) est défini en tout point x^0 distinct de 0, et il est indépendant de ce point. L'index est alors un nombre ne dépendant que du système (2).

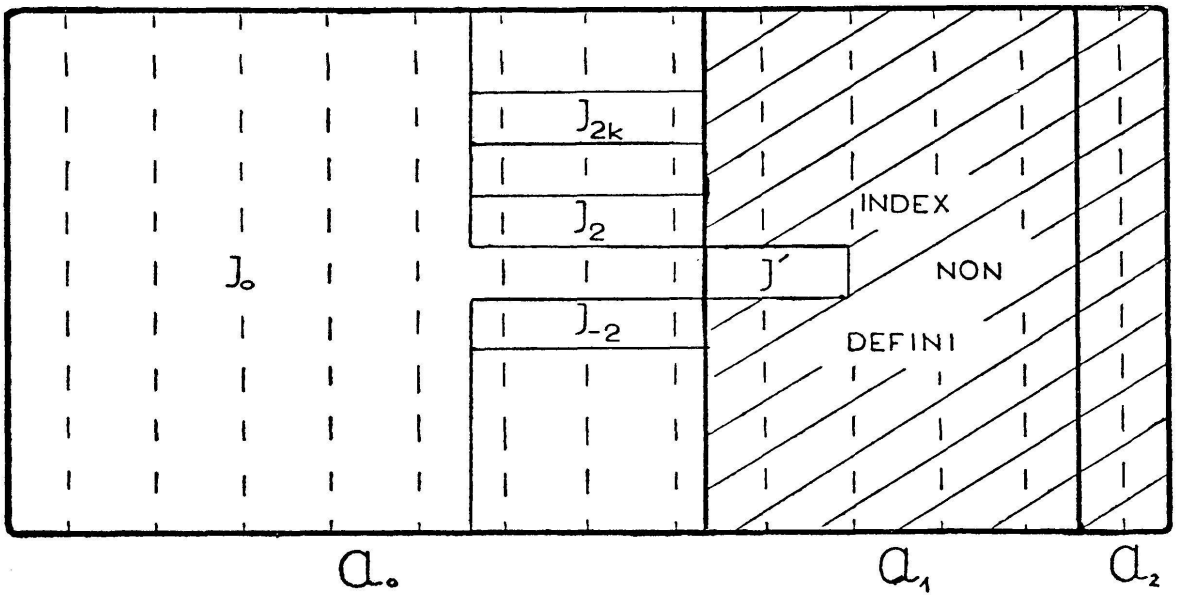
a) si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$ l'index du système est nul (C. III 2°)

b) si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$ l'index du système est $2k$ (C. III 8°) où $k \in \mathbf{Z}$ est attaché à la classe d'homotopie (C. III 7°) du système (2).

2° si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 0$, et si en x^0 l'index est défini, cet index est nul (III 2°) (ensemble J′ du tableau ci-dessous).

On pourra remarquer que l'index d'un système linéaire, en un point x^0 où il est défini, est dans tous les cas pair.

Ces résultats ont été détaillés dans le tableau ci-dèssous: il représente l'ensemble $\mathscr{A}$ des systèmes différentiels périodiques linéaires, d'ordre 2, décomposé en les sous-ensembles $\mathscr{A}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ définis dans C. III. On note par $\mathscr{J}_{2k}$ l'ensemble des systèmes différentiels d'index $2k$. Les classes d'équivalence de systèmes (deux systèmes différentiels étant équivalents (C. III 4°) s'il existe un changement de variable linéaire et périodique $y = D(t)x$ permettant de transformer l'un en l'autre), ont été représentés par des tirets. On remarquera que certaines classes sont en entier dans $\mathscr{J}_0$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$), donc que toute transformation linéaire sur un système de cette classe laisse l'index invariant et nul. Au contraire, si une classe rencontre un $\mathscr{J}_{2k}$ $(k \neq 0)$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$), elle les rencontre tous: étant donné un système différentiel dans une telle classe, tout index pair peut être obtenu à l'aide d'une transformation linéaire périodique adéquate.



B. Définition de l'index $i(f, x^0)$

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \tag{3}$$