V

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$T_1(A, B) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad}_A \operatorname{grad}_B g(A, B), \tag{14}$$

qui est bien défini sans qu'on ait à choisir des directions en A et en B, et vérifie une équation analogue à l'équation (12).

Dans sa notice de 1912, Hadamard a bien voulu rappeler que j'ai indiqué dans ma thèse ce qu'il appelle la raison profonde du fait que la même équation (12) se rencontre ainsi dans trois problèmes distincts: c'est qu'elle est presque la seule qui soit complètement intégrable. D'une manière précise, si une équation de la forme

$$\delta\psi(A, B) = \int_c f[\psi(A, B), \psi(A, M), \psi(M, B), A, B, M]\, \delta n ds \tag{15}$$

est complètement intégrable, un changement de la fonctionnelle inconnue la ramène à la forme (12). Si j'ai rappelé ce résultat, c'est pour dire une fois de plus ce que je dois à Hadamard. Quant à la fin de l'année scolaire 1909-1910, ayant suivi son cours au Collège de France, je lui fis observer qu'il n'avait pas soulevé le problème de l'intégrabilité des équations (9) à (12), il me répondit qu'il avait l'intention de l'étudier, mais que, puisque j'en avais eu l'idée, il me laissait le champ libre. Il m'abandonnait ainsi un magnifique sujet de recherches, qui devint celui de ma thèse.

V

Le calcul des variations, qui avait eu un grand développement bien avant les travaux de Volterra, apparaît aujourd'hui comme un chapitre du calcul fonctionnel, celui où l'on étudie les maximums et minimums des fonctionnelles. Mais les précurseurs, et notamment Euler et Lagrange, n'avaient considéré que des fonctionnelles particulières, représentables par des intégrales telles que

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

ou des intégrales plus générales (simples ou multiples) où peuvent figurer des dérivées d'ordres plus élevés de la fonction inconnue (d'une ou plusieurs variables). Euler avait formé une équation différentielle qui, jointe à des conditions aux limites, donne en principe la fonction qui réalise l'extremum cherché. Mais leurs théories manquaient de rigueur. La recherche des

conditions suffisantes de l'extremum était surtout difficile, et, malgré les travaux de Jacobi, Legendre, Weierstrass et Hilbert, il restait beaucoup à faire lorsqu'Hadamard s'occupa de la question à l'occasion de son cours du Collège de France. Ses recherches aboutirent à un gros livre qui parut en 1910. Il serait difficile, dans cet exposé didactique, de distinguer ce qui lui est dû, si nous n'y étions pas aidés par sa notice de 1912, dont nous allons reproduire un extrait:

« Dans le cas de l'extremum libre, lorsqu'on l'examine au point de vue de la condition de Jacobi, particulièrement dans les cas douteux où les deux extrémités de l'arc d'intégration sont des foyers conjugués, la discussion est, en général, rendue très aisée, même dans ces cas exceptionnels, par une considération géométrique simple dérivant de la construction de Darboux-Erdmann: l'extremum est conservé ou non suivant que les deux arcs d'extrémale que cette condition conduit à tracer forment un angle saillant (c'est-à-dire tournant sa pointe à l'opposé de l'arc tracé) ou rentrant.

» De plus, si l'extremum cesse au moment où la seconde extrémité de l'arc d'intégration coïncide avec le foyer conjugué de la première, j'ai montré qu'il est rétabli lorsqu'on impose à la ligne variée un voisinage du second ordre avec la ligne primitive, absolument, d'ailleurs, comme dans l'exemple de Scheeffer. Cette circonstance tend donc à apparaître dans les cas limites, au lieu que dans tous les autres (lorsque l'intégrale porte sur des dérivées premières) le voisinage du second ordre n'entraîne, à cet égard, aucune conséquence que n'implique déjà celui du premier.

» La même méthode donne une démonstration différente de celle de Poincaré, et d'ailleurs très simple, des conditions établies dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* pour l'extremum d'une intégrale prise le long d'une ligne fermée.

» La condition de Legendre-Weierstrass, contrairement à celle de Jacobi, devient prépondérante lorsque la ligne variée a un grand nombre de sinuosités. En mettant ce fait en évidence, j'ai pu, du même coup, tenir compte très simplement des courbes sans tangentes, le long desquelles la valeur de l'intégrale ne peut être définie que moyennant une extension convenable donnée au sens de ce mot. La démonstration de l'existence de l'extremum, lorsqu'on fait entrer en ligne de compte de telles courbes en même temps que celles qui ont une tangente continue, a coûté de grands efforts et des analyses parfois très compliquées, tant qu'on a voulu se servir des propriétés particulières de chaque mode de définition généralisée qu'on peut appliquer à l'intégrale. J'ai constaté au contraire, qu'elle est intuitive lorsqu'on part

des propriétés nécessairement communes, par la nature même des choses, à toutes les définitions dont il s'agit. »

Nous ne pouvons pas reproduire les dix pages qu'Hadamard consacre dans sa notice à ses travaux sur le calcul des variations. Elles ne sauraient remplacer la lecture de son livre, qui seule peut donner une idée de la perfection à laquelle il avait amené ce calcul. Le passage que nous avons choisi montre bien que, pour résoudre un problème délicat, il n'hésite pas à en modifier l'énoncé. Le problème était insoluble, parce que mal posé; mieux posé, il devient résoluble, et Hadamard sait bien imaginer les méthodes nécessaires. Il n'y a sans doute pas, dans son calcul des variations, un théorème saillant, facile à monter en épingle, comme il y en a dans d'autres parties de son œuvre, et spécialement dans celle dont M. Mandelbrojt doit rendre compte. On peut plutôt dire que le calcul des variations était un édifice dont Euler, Lagrange, Jacobi et Weierstrass avaient bâti la charpente. Mais elle manquait de solidité. Malgré les efforts de Weierstrass, les véritables conditions de l'extremum étaient mal connues. Même pour un problème simple, comme celui de la courbe plane reliant deux points donnés qui en tournant autour d'une droite de son plan engendre la plus petite aire possible, les cas où le minimum est réalisé par une courbe régulière, solution de l'équation d'Euler, n'avaient pas été définis avec précision. Hadamard survint, examina avec une rare perspicacité les difficultés qui subsistaient, et laissa un ouvrage achevé là où il n'avait trouvé qu'une ébauche.

VI

Hadamard devait fatalement s'intéresser au calcul des probabilités. C'est au Congrès de Bologne, en 1928, qu'il présenta une communication sur le battage des cartes et sa relation avec la mécanique statistique, qui donna une nouvelle impulsion à l'étude des chaînes de Markov. Pour le problème particulier du battage des cartes, il rappelle d'abord les résultats antérieurement établis par divers auteurs, notamment Poincaré et Markov, et constate qu'ils ne se sont pas occupés du cas singulier. Rappelons que pour exclure ce cas, du moins pour ce qu'il appelle le problème b, il faut et il suffit que, pour h et k quelconques et pour tout n assez grand, on ait $p^n_{h,k} > 0$, $p^n_{h,k}$ étant la probabilité que la carte qui occupe initialement le rang h arrive au rang k après n répétitions du geste fait pour battre les cartes. Alors, pour n infini, $p^n_{h,k}$ tend vers $\frac{1}{r}$, r étant le nombre des cartes.