FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

Autor(en): **Schreiber, J.-P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41556

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

par J.-P. SCHREIBER

I. La fonction de Peano f applique le segment [0, 1] sur le carré [0, 1] $\times$ [0, 1], et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$; de ce fait, pour tout compact K de [0, 1], on a la relation suivante entre les dimensions de Hausdorff de K et $f(K)$: [1]

$$dim\,\{f(K)\} \leqslant 2\,dim\,\{K\}\,.$$

Montrons qu'on a en fait égalité. Il suffit de supposer dim $\{K\} > 0$. Soit $\beta <$ dim $\{K\}$; il existe (Frostmann: cf. [1]) une mesure μ positive portée par K, telle que pour tout intervalle I de [0, 1]:

$$\mu(I) \leqslant C\,|I|^{\beta}\,.$$

La mesure image $f(\mu) = \nu$ est une mesure positive portée par $f(K)$. Montrons que, pour tout carré J de [0, 1] $\times$ [0, 1] on a

$\nu(J) \leqq c' \cdot |J|^{2\beta}$ ($|J|$ est la longueur du côté de J).

Pour le « carré d'ordre n »:

$$J = \left\{(x, y)\,;\quad \frac{p}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{3^n}\,,\quad \frac{q}{3^n} \leqslant y \leqslant \frac{q+1}{3^n}\right\}$$

on a par la définition de f:

$$\nu(J) = \mu\{f^{-1}(J)\} \leqslant 9c'\left(\frac{1}{9^n}\right)^{\beta} = c''\,|J|^{2\beta}\,.$$

Un carré J de côté

$$\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant |J| < \frac{1}{3^n}$$

est recouvert par au plus quatre « carrés d'ordre n »:

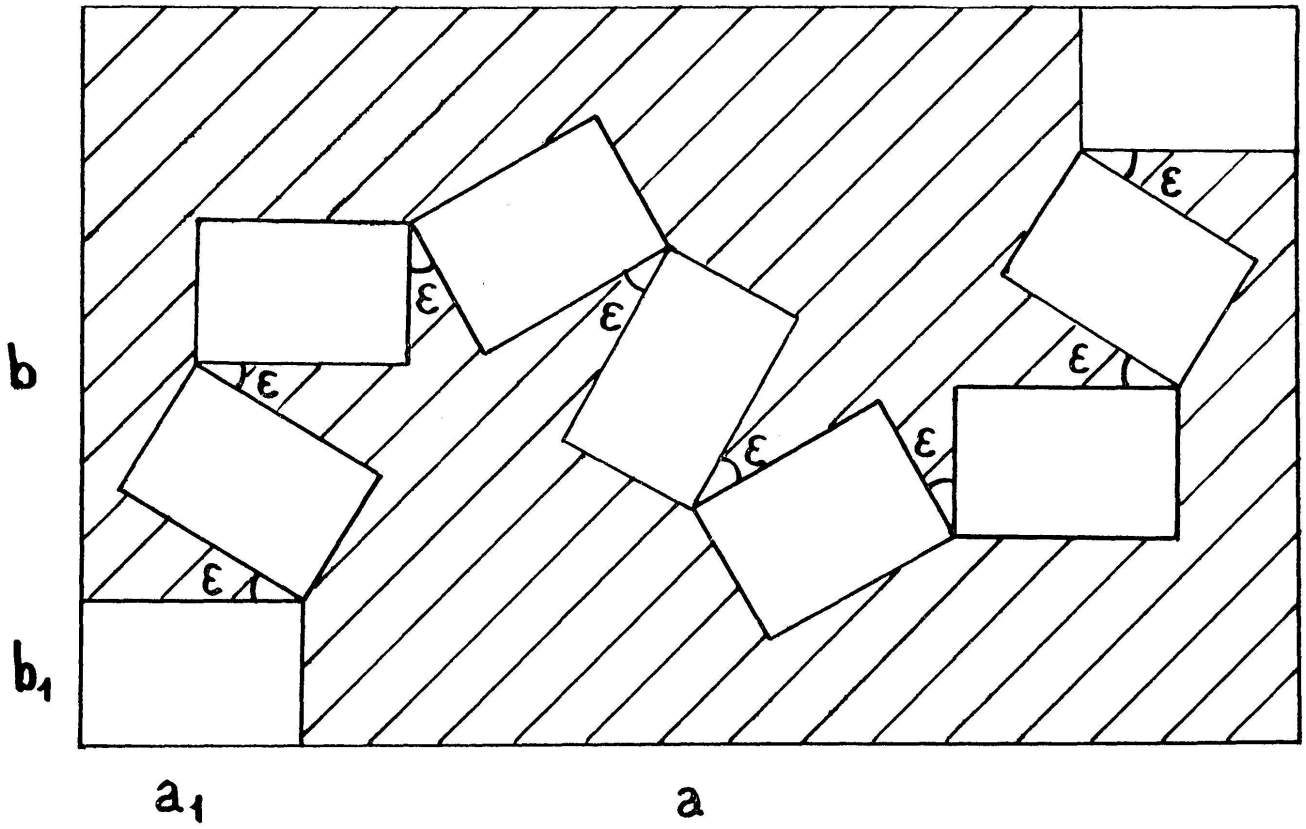
$$\nu(J) \leqslant 4c''\left(\frac{1}{3^n}\right)^{2\beta} \leqslant C\,|J|^{2\beta}\,.$$

On en déduit

$$dim\,\{f(K)\} \geqslant 2\beta$$

$$dim\,\{f(K)\} = 2\,dim\,K\,.$$

II. Une légère modification des remarques précédentes permet d'obtenir une application continue du segment [0, 1] dans le plan qui soit *injective* et telle que tout compact de [0, 1] ait une image dont la dimension de Hausdorff soit double. Pour cela nous allons un peu bousculer les carrés servant à construire la courbe de Peano, de façon à « séparer » les points doubles; en fait il est commode de considérer des rectangles et de les subdiviser comme l'indique la figure.



Neuf rectangles de côtés a_1, b_1, faisant entre eux un petit angle ε, s'inscrivent dans un rectangle de côtés a, b:

$$\begin{cases} a = a_1(4 - \cos 2\varepsilon) + b_1(\sin 2\varepsilon + 4 \sin \varepsilon) \\ b = a_1(-\sin 2\varepsilon + 4 \sin \varepsilon) + b_1(4 - \cos 2\varepsilon)\,, \end{cases}$$

soit pour ε tendant vers 0 $\begin{cases} a \sim 3a_1 + 6b_1\,\varepsilon \\ b \sim 3b_1 + 2a_1\,\varepsilon\,. \end{cases}$

Par conséquent, à partir d'un rectangle (a, b) et pour un nombre $\eta > 0$ arbitraire, nous pouvons effectuer une dissection en neuf rectangles (a_1, b_1)

contenus dans le rectangle initial, l'angle ε étant choisi assez petit pour que

$$\begin{cases} 9\, a_1\, b_1 > ab\,(1-\eta) \\ min\left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{b_1}{a_1}\right) > min\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right) - \eta\,. \end{cases}$$

Soit alors une suite de nombres η_n, $0 < \eta_n < 1$ telle que

$$(*) \qquad \prod_{n=0}^{\infty} (1-\eta_n) > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

donc aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n < \frac{1}{2}\,.$$

Partant du carré unité, effectuons une suite de dissections en rectangles, chaque rectangle de la n^ième^ dissection étant partagé en neuf rectangles de côtés a_{n+1}, b_{n+1} de manière que

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad 9\, a_{n+1}\, b_{n+1} > a_n\, b_n\,(1-\eta_n) \\ \text{(ii)} \quad min\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > min\left(\dfrac{a_n}{b_n}, \dfrac{b_n}{a_n}\right) - \eta_n \end{cases}$$

$$a_0 = 1\,, \qquad b_0 = 1\,.$$

En faisant correspondre à tout intervalle $\left[\dfrac{k}{9^n}, \dfrac{k+1}{9^n}\right]$ de [0, 1] le $k^{\text{ième}}$ rectangle de la chaîne obtenue à la $n^{\text{ième}}$ dissection, on définit une application continue de [0, 1] dans le carré unité, f, dont l'image est une courbe simple.

Si K est un compact de [0, 1], en conservant les notations du I, on définit une mesure ν sur $f(K)$. Comme les rectangles de la $n^{\text{ième}}$ dissection ont une aire supérieure à $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(9)^n}$ et que le rapport des longueurs des côtés est supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le carré:

$$J = \left\{ \{x, y\}\,, \quad \frac{p}{3^n} \leqslant x < \frac{p+1}{3^n}\,, \quad \frac{q}{3^n} \leqslant y < \frac{q+1}{3^n} \right\}$$

rencontre au plus 100 de ces rectangles, donc ν (I) $\leqslant 100\, c \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\beta}$. La démonstration s'achève ensuite comme dans la première partie.

RÉFÉRENCE

[1] KAHANE, J.-P. et R. SALEM. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Hermann, 1963.

(Reçu le 30 mars 1968)

J.-P. Schreiber
Faculté des Sciences d'Orsay.