Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF
Autor: Schreiber, J.-P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41556

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

par J.-P. SCHREIBER

I. La fonction de Peano f applique le segment [0, 1] sur le carré [0, 1] $\times$ [0, 1], et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$; de ce fait, pour tout compact K de [0, 1], on a la relation suivante entre les dimensions de Hausdorff de K et $f(K)$: [1]

$$dim\,\{f(K)\} \leqslant 2\,dim\,\{K\}\,.$$

Montrons qu'on a en fait égalité. Il suffit de supposer dim $\{K\} > 0$. Soit $\beta <$ dim $\{K\}$; il existe (Frostmann: cf. [1]) une mesure μ positive portée par K, telle que pour tout intervalle I de [0, 1]:

$$\mu(I) \leqslant C\,|I|^{\beta}\,.$$

La mesure image $f(\mu) = \nu$ est une mesure positive portée par $f(K)$. Montrons que, pour tout carré J de [0, 1] $\times$ [0, 1] on a

$\nu(J) \leqq c' \cdot |J|^{2\beta}$ ($|J|$ est la longueur du côté de J).

Pour le « carré d'ordre n »:

$$J = \left\{(x, y)\,;\quad \frac{p}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{3^n}\,,\quad \frac{q}{3^n} \leqslant y \leqslant \frac{q+1}{3^n}\right\}$$

on a par la définition de f:

$$\nu(J) = \mu\{f^{-1}(J)\} \leqslant 9c'\left(\frac{1}{9^n}\right)^{\beta} = c''\,|J|^{2\beta}\,.$$

Un carré J de côté

$$\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant |J| < \frac{1}{3^n}$$

est recouvert par au plus quatre « carrés d'ordre n »:

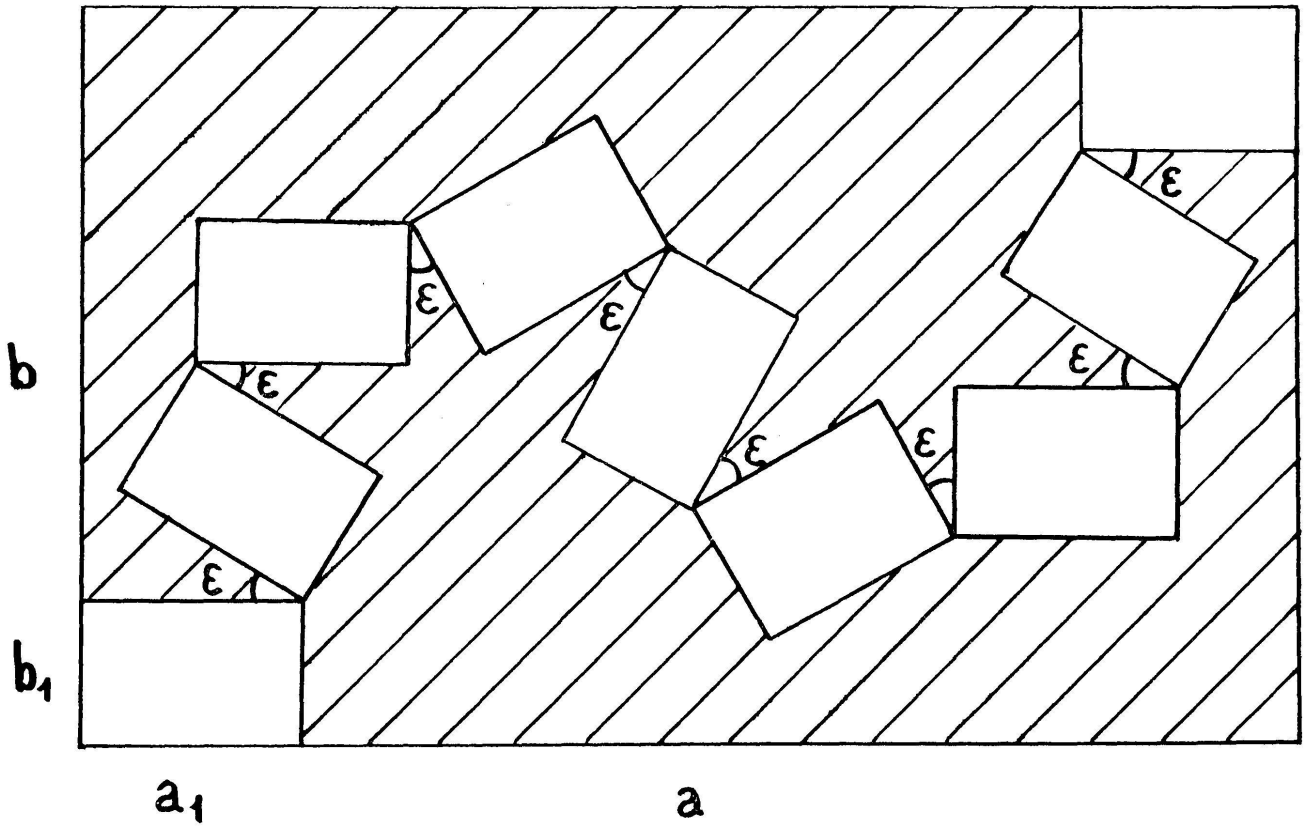
$$\nu(J) \leqslant 4c''\left(\frac{1}{3^n}\right)^{2\beta} \leqslant C\,|J|^{2\beta}\,.$$

On en déduit

$$dim\,\{f(K)\} \geqslant 2\beta$$

$$dim\,\{f(K)\} = 2\,dim\,K\,.$$

II. Une légère modification des remarques précédentes permet d'obtenir une application continue du segment [0, 1] dans le plan qui soit *injective* et telle que tout compact de [0, 1] ait une image dont la dimension de Hausdorff soit double. Pour cela nous allons un peu bousculer les carrés servant à construire la courbe de Peano, de façon à « séparer » les points doubles; en fait il est commode de considérer des rectangles et de les subdiviser comme l'indique la figure.



Neuf rectangles de côtés a_1, b_1, faisant entre eux un petit angle ε, s'inscrivent dans un rectangle de côtés a, b:

$$\begin{cases} a = a_1(4 - \cos 2\varepsilon) + b_1(\sin 2\varepsilon + 4 \sin \varepsilon) \\ b = a_1(-\sin 2\varepsilon + 4 \sin \varepsilon) + b_1(4 - \cos 2\varepsilon)\,, \end{cases}$$

soit pour ε tendant vers 0 $\begin{cases} a \sim 3a_1 + 6b_1\,\varepsilon \\ b \sim 3b_1 + 2a_1\,\varepsilon\,. \end{cases}$

Par conséquent, à partir d'un rectangle (a, b) et pour un nombre $\eta > 0$ arbitraire, nous pouvons effectuer une dissection en neuf rectangles (a_1, b_1)

contenus dans le rectangle initial, l'angle ε étant choisi assez petit pour que

$$\begin{cases} 9\, a_1\, b_1 > ab\,(1-\eta) \\ min\left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{b_1}{a_1}\right) > min\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right) - \eta\,. \end{cases}$$

Soit alors une suite de nombres η_n, $0 < \eta_n < 1$ telle que

$$(*) \qquad \prod_{n=0}^{\infty} (1-\eta_n) > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

donc aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n < \frac{1}{2}\,.$$

Partant du carré unité, effectuons une suite de dissections en rectangles, chaque rectangle de la n^ième^ dissection étant partagé en neuf rectangles de côtés a_{n+1}, b_{n+1} de manière que

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad 9\, a_{n+1}\, b_{n+1} > a_n\, b_n\,(1-\eta_n) \\ \text{(ii)} \quad min\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > min\left(\dfrac{a_n}{b_n}, \dfrac{b_n}{a_n}\right) - \eta_n \end{cases}$$

$$a_0 = 1\,, \qquad b_0 = 1\,.$$

En faisant correspondre à tout intervalle $\left[\dfrac{k}{9^n}, \dfrac{k+1}{9^n}\right]$ de [0, 1] le $k^{\text{ième}}$ rectangle de la chaîne obtenue à la $n^{\text{ième}}$ dissection, on définit une application continue de [0, 1] dans le carré unité, f, dont l'image est une courbe simple.

Si K est un compact de [0, 1], en conservant les notations du I, on définit une mesure ν sur $f(K)$. Comme les rectangles de la $n^{\text{ième}}$ dissection ont une aire supérieure à $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(9)^n}$ et que le rapport des longueurs des côtés est supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le carré:

$$J = \left\{ \{x, y\}\,, \quad \frac{p}{3^n} \leqslant x < \frac{p+1}{3^n}\,, \quad \frac{q}{3^n} \leqslant y < \frac{q+1}{3^n} \right\}$$

rencontre au plus 100 de ces rectangles, donc ν (I) $\leqslant 100\, c \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\beta}$. La démonstration s'achève ensuite comme dans la première partie.

RÉFÉRENCE

[1] KAHANE, J.-P. et R. SALEM. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Hermann, 1963.

(Reçu le 30 mars 1968)

J.-P. Schreiber
Faculté des Sciences d'Orsay.