VI

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

des propriétés nécessairement communes, par la nature même des choses, à toutes les définitions dont il s'agit. »

Nous ne pouvons pas reproduire les dix pages qu'Hadamard consacre dans sa notice à ses travaux sur le calcul des variations. Elles ne sauraient remplacer la lecture de son livre, qui seule peut donner une idée de la perfection à laquelle il avait amené ce calcul. Le passage que nous avons choisi montre bien que, pour résoudre un problème délicat, il n'hésite pas à en modifier l'énoncé. Le problème était insoluble, parce que mal posé; mieux posé, il devient résoluble, et Hadamard sait bien imaginer les méthodes nécessaires. Il n'y a sans doute pas, dans son calcul des variations, un théorème saillant, facile à monter en épingle, comme il y en a dans d'autres parties de son œuvre, et spécialement dans celle dont M. Mandelbrojt doit rendre compte. On peut plutôt dire que le calcul des variations était un édifice dont Euler, Lagrange, Jacobi et Weierstrass avaient bâti la charpente. Mais elle manquait de solidité. Malgré les efforts de Weierstrass, les véritables conditions de l'extremum étaient mal connues. Même pour un problème simple, comme celui de la courbe plane reliant deux points donnés qui en tournant autour d'une droite de son plan engendre la plus petite aire possible, les cas où le minimum est réalisé par une courbe régulière, solution de l'équation d'Euler, n'avaient pas été définis avec précision. Hadamard survint, examina avec une rare perspicacité les difficultés qui subsistaient, et laissa un ouvrage achevé là où il n'avait trouvé qu'une ébauche.

VI

Hadamard devait fatalement s'intéresser au calcul des probabilités. C'est au Congrès de Bologne, en 1928, qu'il présenta une communication sur le battage des cartes et sa relation avec la mécanique statistique, qui donna une nouvelle impulsion à l'étude des chaînes de Markov. Pour le problème particulier du battage des cartes, il rappelle d'abord les résultats antérieurement établis par divers auteurs, notamment Poincaré et Markov, et constate qu'ils ne se sont pas occupés du cas singulier. Rappelons que pour exclure ce cas, du moins pour ce qu'il appelle le problème b, il faut et il suffit que, pour h et k quelconques et pour tout n assez grand, on ait $p^n_{h,k} > 0$, $p^n_{h,k}$ étant la probabilité que la carte qui occupe initialement le rang h arrive au rang k après n répétitions du geste fait pour battre les cartes. Alors, pour n infini, $p^n_{h,k}$ tend vers $\frac{1}{r}$, r étant le nombre des cartes.

Hadamard considère ensuite le cas d'une variable x, comprise dans un intervalle (a, b), et qu'une transformation T comportant un élément aléatoire transforme en une variable y située dans le même intervalle. La loi de probabilité de y est définie par la densité de probabilité $f(x, y)$, ou, si elle n'est pas absolument continue, par la fonction de répartition $F(x, y)$. Hadamard considère surtout le premier cas et observe que, si la densité de probabilité $f_n(x, y)$ obtenue en partant de x par l'opération T^n tend pour n infini vers une limite $\varphi(x)$, il résulte de la loi de récurrence de la suite des f_n que cette limite vérifie l'équation intégrale

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, \varphi(x)\, dx\,,$$

qui est une équation de Fredholm, homogène. Il introduit le paramètre λ de Fredholm dans cette équation et dans l'équation associée, obtenue en remplaçant $f(x, y)$ par $f(y, x)$, et, observant que le cas singulier est lié à l'existence de racines du dénominateur $D(\lambda)$ de Fredholm de la forme $\lambda = e^{i\alpha}$ (a réel $\neq 0$, mod. 2π), discute les conditions de réalisation de ce cas singulier. Il montre ensuite l'analogie qui existe entre cette recherche d'une répartition limite, et spécialement celle des cas où elle est indépendante de la valeur initiale x, et les problèmes ergodiques de la mécanique statistique.

Ce travail est surtout important par l'impulsion qu'il a donnée à la théorie des processus de Markov, qui est aujourd'hui un des principaux chapitres du calcul des probabilités. Il est possible qu'il ait contribué à inspirer le mémoire fondamental de Kolmogorov sur les méthodes analytiques du calcul des probabilités (1931). Il est en tout cas certain qu'il a inspiré une suite de beaux travaux de M. Fréchet, tant sur le cas continu que sur le cas discontinu, et qu'Hadamard lui-même a contribué à ces études par un nouveau mémoire rédigé en collaboration avec M. Fréchet (1933). En 1938, ce dernier, se limitant au cas d'un système n'ayant qu'un nombre fini d'états possibles et aux chaînes discontinues, a publié un exposé de la question qui semble définitif. Peu après, Kolmogorov abordait l'étude des systèmes ayant une infinité dénombrable d'états possibles. L'étude du cas continu, où l'on introduit une infinité continue d'états possibles, tout en remplaçant la suite discrète de variables aléatoires X_n par une fonction $X(t)$ du temps t, a donné lieu à des travaux si nombreux, aux Etats-Unis, en U.R.S.S., au Japon, et aussi en France et dans d'autres pays d'Europe, que nous ne pouvons pas les énumérer ici. On se demande si, dès 1928,

Hadamard avait eu l'intuition de ce prodigieux développement. Il est certain, en tout cas, qu'il avait compris l'importance du principe ergodique, tant en calcul des probabilités qu'en mécanique statistique; le souvenir de conversations remontant à cette époque me permet de l'affirmer.

VII

Cet exposé est loin d'être complet. Non seulement nous n'avons pas empiété sur les chapitres dont l'exposé sera fait par d'autres élèves d'Hadamard, mais, dans la partie de ses œuvres mathématiques dont nous avions à parler, nous n'avons mentionné que ce qui nous a paru très important. Il nous reste à parler de son activité à côté, ou même tout à fait en dehors, du domaine des mathématiques.

Nous avons déjà dit qu'il s'était intéressé à la mécanique et à la physique, mais que ce n'était pas à nous de développer l'ensemble de ces travaux, qui se rattachent aux exposés que doivent faire MM. Malgrange et Malliavin. Nous devons toutefois mentionner une note de 1898 sur la forme de l'espace, qui fait penser que, comme Poincaré à la même époque, il était bien près de découvrir la relativité. En 1924, il revient sur cette question pour expliquer par suite de quelles circonstances il est passé à côté de cette découverte. Dans l'intervalle, il avait publié un compte rendu du livre de Larmor, *Aether and matter*, et une note sur l'interprétation théorique des raies spatiales et une autre sur la détermination du champ électrique. J'ai souvenir aussi d'avoir lu de lui un compte rendu de la thermodynamique de Gibbs, oublié dans la liste de ses œuvres publiée en 1935. Mais ces rares notes ne donnent pas une idée de la manière dont, informé tant par ses relations avec Langevin et avec Jean Perrin que parce qu'il était à l'affût de toutes les idées nouvelles, il suivait les progrès de la physique.

Nous avons dit aussi qu'il s'était toujours intéressé à l'enseignement des sciences. Sans revenir sur ses exposés didactiques (leçons de géométrie, cours d'analyse), nous devons mentionner de nombreuses interventions dans la discussion des programmes (1903, les sciences dans l'enseignement secondaire; 1923, la réforme de l'enseignement secondaire; 1926, à propos de la réforme du programme de mathématiques spéciales; de 1930 à 1934, de nombreux articles sur ces questions dans l'*Œuvre* et dans l'*Enseignement scientifique*). S'il s'est surtout occupé des programmes des sciences mathématiques et physiques, il s'est aussi intéressé à ceux des sciences naturelles, auxquelles il aurait voulu donner une place plus grande dans les petites