4. Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques d'ordre deux

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

conditions nécessaires pour que tel problème admette une solution: tel est, par exemple, le point de départ des travaux de Gårding sur les équations hyperboliques d'ordre supérieur.

Et d'une façon générale, le point de vue d'Hadamard suivant lequel il convient de classer les équations en fonction des propriétés de leurs solutions différentiables (plutôt qu'analytiques) a contribué de façon décisive au progrès de la théorie et garde aujourd'hui toute sa valeur d'orientation, même si on ne l'exprime plus nécessairement en termes de « problèmes correctement posés ».

4. *Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques d'ordre deux*

Il s'agit là de la contribution majeure d'Hadamard à la théorie des équations aux dérivées partielles. Etant donnée une équation du second ordre, à partie principale de signature $(1, n-1)$, et une hypersurface (S) à orientation d'espace, on peut prévoir, pour des raisons physiques notamment, que le problème de Cauchy sera correctement posé, et que la solution, en un point a, ne dépendra que des données (conditions initiales, et second membre), dans la région (V) limitée par (S) et le conoïde caractéristique issu de a (plus précisément: le demi-conoïde caractéristique dont les génératrices rencontrent (S)). Telles étaient aussi les conclusions suggérées par les cas déjà traités: équation des ondes à trois dimensions d'espace (donc à quatre variables), par Poisson et Kirchhoff, équations hyperboliques à deux variables, par Riemann (l'existence de la « fonction de Riemann » ayant été démontrée dans le cas analytique par Darboux); enfin, équation des ondes à n variables, par Volterra et Tedone. Hadamard donne la solution pour une équation à coefficients analytiques, d'abord en 1905 [1] pour trois variables, puis en 1908 [3] dans le cas général. Son idée, comme celle de Riemann ou de Volterra, dont il discute les méthodes en détail, consiste en principe à appliquer la formule de Green dans le domaine V; on est conduit à prendre pour solution de l'équation adjointe ce qu'il nomme la « solution élémentaire », qui n'est autre que la fonction construite par le même procédé que la solution élémentaire dans le cas elliptique (cette fonction avait été construite dans le domaine complexe, et le type de l'équation n'intervenait donc pas dans son calcul[1]). On essaie alors

1 Aujourd'hui, à la suite de L. Schwartz, il paraît plus naturel de prendre pour définition d'une solution élémentaire la formule $L(v) = \delta_a$; mais ceci exige le concept de distribution. Ce que Hadamard appelle solution élémentaire n'est donc plus, dans le cas hyperbolique, ce que l'on appellerait ainsi aujourd'hui; mais c'est une fonction, ayant une singularité convenable, et servant d'intermédiaire dans le calcul de la « solution élémentaire » au sens actuel.

de copier le calcul usuel que l'on fait dans le cas elliptique; mais ici, même en isolant le point a, on trouve des intégrales divergentes sur tout le cône caractéristique; dans le cas de deux variables, la méthode de Riemann permettait d'éliminer cette difficulté à cause de certaines particularités; d'un autre côté, Volterra et Tedone la surmontaient par des intégrations préalables le long de certaines courbes: Hadamard note que ce procédé pourrait être généralisé, mais qu'il présente un côté artificiel (et notamment, dans le cas de l'équation des ondes, n'est pas invariant par les transformations de Lorentz). Il montre que l'on peut surmonter directement la difficulté au moyen de la notion de « partie finie d'une intégrale divergente », qu'il introduit et développe à cette occasion.

Avant d'en dire plus sur le problème de Cauchy, il convient de s'arrêter quelque peu sur cette notion. Commençons, comme Hadamard, par examiner des fonctions d'une variable; considérons l'intégrale

$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{a} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\, dx$, $\alpha > 0$ non entier (cette restriction est essentielle); lorsque f est suffisamment dérivable en 0, on peut trouver des constantes λ_p ($0 < p < \alpha$, p entier), telles que la quantité $I(\varepsilon) - \Sigma\, \lambda_p\, \varepsilon^{p-\alpha}$ ait une limite pour ε tendant vers 0; il appelle cette limite « partie finie » de l'intégrale considérée, et la note $\overline{\int_{o}^{a} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\, dx}$ (nous écrirons plutôt $P.f. \int_{o}^{a} \ldots$). Il montre que cette intégrale généralisée possède de remarquables propriétés relativement au changement de variables, à l'intégration par parties (que l'on fait comme si la borne inférieure n'existait pas), et à la dérivation par rapport à la borne inférieure: la dérivée par rapport à b de $P.f. \int_{o}^{a} \frac{f(x, b)\, dx}{(x-b)^{\alpha}}$ se calcule comme si la borne inférieure était fixe. Il remarque à ce propos: « Il s'ensuit que toute équation différentielle (linéaire) qui serait vérifiée par l'intégrale (considérée comme une fonction de b) si elle était prise entre les limites constantes a, c, l'est aussi quand une des limites est justement b »; idée dont il fait remonter le principe à Darboux (voir *Le problème de Cauchy* [6], 1932, pp. 167 et 194).

Passant ensuite aux intégrales multiples, il définit et étudie de même l'expression

$$P.f. \int_{V} \frac{f(x)}{[G(x)]^{\alpha}}\, dx\,,$$

lorsqu'une partie de la frontière de V est constituée par l'hypersurface $G = 0$, supposée régulière.

Il convient de noter ici combien cette notion pouvait sembler inattendue et paradoxale à l'époque, et à Hadamard lui-même, comme il l'a dit souvent; certes, on connaissait déjà les intégrales convergeant en « valeur principale, au sens de Cauchy », et qui exigeaient pour exister des conditions de dérivabilité sur f; mais, là, il n'était pas nécessaire de retrancher des infiniment grands, et, pour cette raison, la « partie finie » semblait à Hadamard de nature fort différente. Il faut noter aussi, avec L. Schwartz toute son importance pour le développement de la théorie des distributions, dont les parties finies fournissent naturellement les premiers exemples non triviaux, et où elles conduisent naturellement au « problème de la division ».

Muni de cette théorie, Hadamard peut alors résoudre le problème de Cauchy, en commençant par le cas d'un nombre impair de variables; la méthode indiquée plus haut peut alors s'appliquer, en commençant par isoler le point a en retranchant du domaine d'intégration (V) la portion (W) située entre le conoïde caractéristique et une hypersurface d'espace (Σ) proche de a; il applique alors la formule de Green au sens des parties finies; avec des notations que nous avons déjà employées, et en prenant pour v la « solution élémentaire » décrite plus haut on trouve

$$Pf\int_{V-W} v\,L(u)\,d\,V = Pf\int_{S'} M(u,v)\,d\,S - Pf\int_{\Sigma'} M(u,v)\,d\,S$$

S' (resp. Σ') désignant la portion de S (resp. Σ) contenue à l'intérieur du conoïde caractéristique; le fait important est qu'ici, il n'y a pas d'intégrale sur le conoïde caractéristique (son équation est $\Gamma = 0$, et v est de la forme $\left(\frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}\right)$, et par conséquent, tout est connu en fonction des données à l'exception du dernier terme; or il montre précisément que (comme dans le cas elliptique), ce dernier terme tend vers $k\,u\,(a)$, k étant une constante numérique aisée à calculer, lorsque Σ s'approche de a. On obtient ainsi une formule que doit nécessairement vérifier la solution du problème de Cauchy; reste à montrer que l'on a effectivement obtenu la solution.

Le cas d'un nombre pair de variables est plus délicat. Hadamard en donne d'abord la solution par la « méthode de descente », i.e. en rajoutant une variable d'espace, prenant des données qui n'en dépendent pas, et éliminant cette variable dans les formules définitives; si le principe est fort simple, les calculs sont assez compliqués dans le détail. Plus tard, en 1924

[1], il donnera également une méthode directe dont on pourrait dire, en deux mots, qu'elle consiste à faire le même type de calculs, en substituant à la notion de « partie finie » d'une intégrale divergente celle de « partie logarithmique » (notion qu'il n'introduit pas explicitement). Cependant ici, la solution s'exprime par des intégrales ordinaires, mais de deux types: d'une part des intégrales dans V et S'; d'autre part des intégrales « de surface » sur le conoïde caractéristique, et son intersection avec S. Dans le cas de l'équation des ondes à un nombre pair de variables, en particulier dans le « potentiel retardé » de Poisson-Kirchhoff, les termes du premier type ne se présentent pas: Hadamard se livre à cette occasion à une discussion, aujourd'hui classique, du « principe de Huygens », distinguant entre la « mineure », qui exprime la propriété précédente, et la « majeure », propriété générale des équations d'évolution; il montre que, pour les équations d'ordre deux, la « mineure » ne peut être satisfaite que pour un nombre pair de variables, et qu'elle équivaut au fait que la « solution élémentaire » de l'équation adjointe n'a pas de terme logarithmique, autrement dit qu'on a (avec les notations du paragraphe 2) $W = 0$. Il se pose à ce propos la question de savoir s'il existe d'autres équations que l'équation des ondes, et celles qui s'en déduisent par des transformations évidentes, qui possèdent cette propriété. Malgré tout leur intérêt, nous nous permettrons de ne pas insister davantage sur ces questions, et de renvoyer à ce propos le lecteur aux notices déjà citées.

Mentionnons enfin que, dans *Le problème de Cauchy*, Hadamard, s'inspirant des travaux de Levi et Hilbert dans le cas elliptique, élimine l'hypothèse d'analyticité des coefficients en montrant que, si ceux-ci sont assez dérivables, une solution élémentaire approchée permet de ramener le problème à une équation intégrale du type de Volterra, qui se résoud par approximations successives. Pour établir que la solution de l'équation intégrale répond au problème proposé, il est amené à établir en passant la « continuité d'ordre fini » de la solution du problème de Cauchy par rapport aux coefficients de l'équation, question que les considérations conduisant à la notion de « problème correctement posé » amenaient naturellement à envisager.

5. *Les problèmes mixtes*

Le « problème mixte » (le nom est d'Hadamard) auquel il s'intéresse est le suivant: étant donnée une équation hyperbolique du second ordre L,