Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES
Autor: Malgrange, Bernard
Kapitel: 5. Les problèmes mixtes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41526

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

[1], il donnera également une méthode directe dont on pourrait dire, en deux mots, qu'elle consiste à faire le même type de calculs, en substituant à la notion de « partie finie » d'une intégrale divergente celle de « partie logarithmique » (notion qu'il n'introduit pas explicitement). Cependant ici, la solution s'exprime par des intégrales ordinaires, mais de deux types: d'une part des intégrales dans V et S'; d'autre part des intégrales « de surface » sur le conoïde caractéristique, et son intersection avec S. Dans le cas de l'équation des ondes à un nombre pair de variables, en particulier dans le « potentiel retardé » de Poisson-Kirchhoff, les termes du premier type ne se présentent pas: Hadamard se livre à cette occasion à une discussion, aujourd'hui classique, du « principe de Huygens », distinguant entre la « mineure », qui exprime la propriété précédente, et la « majeure », propriété générale des équations d'évolution; il montre que, pour les équations d'ordre deux, la « mineure » ne peut être satisfaite que pour un nombre pair de variables, et qu'elle équivaut au fait que la « solution élémentaire » de l'équation adjointe n'a pas de terme logarithmique, autrement dit qu'on a (avec les notations du paragraphe 2) $W = 0$. Il se pose à ce propos la question de savoir s'il existe d'autres équations que l'équation des ondes, et celles qui s'en déduisent par des transformations évidentes, qui possèdent cette propriété. Malgré tout leur intérêt, nous nous permettrons de ne pas insister davantage sur ces questions, et de renvoyer à ce propos le lecteur aux notices déjà citées.

Mentionnons enfin que, dans *Le problème de Cauchy*, Hadamard, s'inspirant des travaux de Levi et Hilbert dans le cas elliptique, élimine l'hypothèse d'analyticité des coefficients en montrant que, si ceux-ci sont assez dérivables, une solution élémentaire approchée permet de ramener le problème à une équation intégrale du type de Volterra, qui se résoud par approximations successives. Pour établir que la solution de l'équation intégrale répond au problème proposé, il est amené à établir en passant la « continuité d'ordre fini » de la solution du problème de Cauchy par rapport aux coefficients de l'équation, question que les considérations conduisant à la notion de « problème correctement posé » amenaient naturellement à envisager.

5. *Les problèmes mixtes*

Le « problème mixte » (le nom est d'Hadamard) auquel il s'intéresse est le suivant: étant donnée une équation hyperbolique du second ordre L,

et un ouvert V en forme de demi-cylindre, de base une hypersurface S' à orientation d'espace, de surface latérale une hypersurface S'' à orientation de temps, trouver une fonction u dans V connaissant $L\,u$ dans V, u et ses dérivées premières sur S', et u (ou, par exemple $\frac{du}{dn}$) sur S''. Hadamard, dès ses premiers travaux sur les équations aux dérivées partielles, avait rencontré ce problème ou des variantes, notamment à propos des fluides compressibles; en 1900 [3], il montre dans le cas de l'équation des ondes et d'un « cylindre droit » (i.e. produit d'un ouvert d'espace par la demi-droite $t > 0$) l'unicité du problème en utilisant l'intégrale d'énergie dont ce semble être la première apparition comme instrument de démonstration dans la théorie des équations hyperboliques (mais non la dernière, comme on sait). Une note dans *Le Problème de Cauchy*, traduction française (1932 [6]) résume ses travaux sur la question. Il note que ce type de problèmes peut être traité par deux types de méthodes: l'une, celle des « fonctions fondamentales » (i.e. des fonctions propres), qui « retiennent, en quelque sorte, l'aspect elliptique du problème » — on pourrait d'ailleurs en dire autant de la méthode par transformation de Laplace, équivalente à celle de Heaviside, qu'il cite brièvement.

L'autre, cherche à retenir l'aspect hyperbolique du problème, la propagation des ondes, les réflexions sur les parois, et qui évite de faire jouer sans nécessité un rôle spécial à une variable de temps particulière. Il nous faut ajouter que les deux types de méthodes ont, en fait, un domaine d'application assez différent: la première s'applique à des produits d'un ouvert d'espace par la demi-droite $t > 0$, et à des équations non nécessairement hyperboliques; la seconde, à des ouverts « variables au cours du temps », mais est limitée aux équations hyperboliques (et même, encore maintenant, essentiellement aux équations du second ordre).

C'est à ce second type de méthodes que s'attache Hadamard: il note d'abord que, aux points dont le conoïde caractéristique rétrograde rencontre entièrement la frontière sur S', le problème coïncide avec le problème de Cauchy: traçant l'hypersurface caractéristique Σ passant par $S' \cap S''$, on est ramené, pour trouver la solution, à un problème du type de Goursat: trouver la solution entre Σ et S'', connaissant ses valeurs sur ces deux surfaces; dans le cas analytique, le théorème de Goursat dont nous avons parlé au paragraphe 1 fournit alors la solution (tout au moins au voisinage de la surface initiale S'; le prolongement demande d'autres arguments, notamment la « majeure » du principe de Huygens). Il ne pousse pas plus

loin cette méthode qui sera reprise ultérieurement par Schauder et lui fournira, avec les majorations a priori qu'il déduira de l'intégrale d'énergie, la solution du problème; quant à Hadamard, il préfère opérer de façon un peu différente, en cherchant, en langage moderne, le noyau élémentaire qui donne u en fonction des données du problème, et il esquisse une méthode le lui donnant, au moyen de réflexions et d'équations intégrales (analogues à celles considérées précédemment dans le cas non analytique du problème de Cauchy). Les conclusions auxquelles il arrive, notamment sur les singularités du noyau élémentaire et sur la conception des problèmes elliptiques comme limites de problèmes mixtes hyperboliques semblent avoir été partiellement délaissées depuis; on peut penser que de nouvelles études mériteraient encore d'y être consacrées.