Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF

Autor: Lesieur, L.

Kapitel: 3. Anneau de Jacobson

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41528

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Démontrons b). S'il n'y avait qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_h$, on pourrait former le polynôme produit $F = \Psi_1 \Psi_2 \ldots \Psi_h \neq 0$. Il existerait un idéal maximal M ne contenant pas F, soit $M = A\Psi_s$, où Ψ_s est irréductible et figure donc dans les facteurs de F. Il en résulterait $F \in M$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Quant à la partie c) de l'énoncé, supposant connue la notion de clôture algébrique $\bar{k}$ de k (le corps $\bar{k}$ englobe tous les éléments algébriques sur k), il suffit de remarquer que les racines des polynômes irréductibles Ψ_i donnent une infinité d'éléments de $\bar{k}$. En effet, deux polynômes irréductibles Ψ_1 et Ψ_2 différents ne peuvent avoir une racine ξ commune puisque le polynôme Ψ_1 est déterminé par ξ comme base de l'idéal des polynômes de k [X] s'annulant pour ξ. Il y a donc autant (ou plus) d'éléments $\xi \in \bar{k}$ que de polynômes irréductibles Ψ. Remarquons par contre que deux valeurs de ξ différentes peuvent définir le même polynôme Ψ; c'est le cas de i et $-i$ pour l'anneau R [X], qui sont deux racines distinctes du polynôme irréductible $X^2 + 1$.

Ainsi, la notion de radical de Jacobson d'un anneau donne une démonstration simple du théorème 4c, que l'on établit d'habitude par d'autres moyens. Si le corps k possède une infinité d'éléments, par exemple si sa caractéristique est nulle, l'existence d'une infinité d'éléments de $\bar{k}$ est évidente. Par contre, si le corps k a la caractéristique p, par exemple si $k = \{0, 1\}$ est le mini-corps à deux éléments de caractéristique 2, on considère le champ de Galois des racines de l'équation $X^{p^r} - X = 0$, qui possède p^r éléments. Comme r est aussi grand qu'on veut, on voit bien que $\bar{k}$ ne peut avoir un nombre fini d'éléments.

3. Anneau de Jacobson

Dans le cas de l'anneau k [X], tout idéal premier P *non nul* est maximal. Cette propriété tient au fait que l'anneau k [X] est intègre et principal (voir par exemple [10], page 71). Donc, l'idéal premier $P \neq 0$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux M qui le contiennent, un tel idéal M étant nécessairement P lui-même. L'idéal nul, qui est premier aussi, est encore l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent d'après le théorème 2. Il en résulte que l'anneau k [X] est un anneau de Jacobson, conformément à la définition suivante:

Définition 2. On appelle *anneau de Jacobson* un anneau intègre A dans lequel tout idéal premier P est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Nous allons voir que la propriété pour un anneau A d'être un anneau de Jacobson se transfère à l'anneau des polynômes A [X]. On connaît d'autres propriétés simples de transfert de A à A [X], par exemple le caractère « intègre », ou « factoriel ». Par contre, le caractère « principal » ne passe pas: k [X] est principal, mais k [X, Y] ne l'est pas. Nous allons démontrer cette propriété de transfert pour les anneaux de Jacobson.

4. Théorème de transfert

Si A *est un anneau de Jacobson, il en est de même de l'anneau* A [X] *des polynômes à coefficients dans* A.

Il faut donc démontrer que, si $\mathscr{P}$ est un idéal *premier* de A [X], $\mathscr{P}$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent, ou encore:

Théorème 5. *Si $\mathscr{P}$ est un idéal premier propre et si* $\mathrm{F} \notin \mathscr{P}$, *il existe un idéal maximal* M *tel que :* $\mathscr{P} \subseteq \mathrm{M}$, $\mathrm{F} \notin \mathrm{M}$.

Pour étudier les idéaux premiers $\mathscr{P}$ de A [X], nous considérons les idéaux suivants:

$\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$: *idéal projection* (ou restriction); c'est un idéal premier propre de A;

$\Pi = A\,[X]\,\mathfrak{p}$: *idéal projetant* (ou extension de $\mathfrak{p}$) engendré par l'idéal $\mathfrak{p}$ dans A [X]. C'est un idéal premier dans $A\,(X)$ formé par les polynômes dont les coefficients sont des éléments de $\mathfrak{p}$.

On a les inclusions suivantes:

$$\mathfrak{p} \subset \Pi \subseteq \mathscr{P}\,.$$

Premier cas : $\mathscr{P} = \Pi$.

L'idéal $\mathscr{P}$ est alors formé des polynômes:

$$a_0 X^n + \ldots + a_n\,, \quad a_i \in \mathfrak{p}\,.$$

Nous allons voir que le théorème 5 est vrai dans ce cas, sans autre hypothèse sur A.

Soit:

$$F(X) = b_0 X^m + \ldots + b_m \notin \Pi\,.$$

On a donc au moins un coefficient b_j qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$ et on peut supposer que c'est le premier b_0.

Considérons l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$, qui est intègre puisque $\mathfrak{p}$ est premier, et l'homomorphisme canonique $\varphi : A \to A/\mathfrak{p}$. Appelons $\varphi\,(a) = \bar{a}$ la classe