II. Sommes des puissances des racines d'une équation algébrique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'une ou l'autre des deux congruences:

$$w^3 + 7t^2 \equiv 0 \qquad ou \qquad w^3 + 8t^2 \equiv 0\,, \tag{17}$$

entraîne que:

$$K_{16}(w, t) = w^8 + 21\, w^5 t^2 + 15\, w^2 t^4 \equiv 1\,, \tag{17}$$

Pour l'entier premier $N = 31$, le quotient:

$$K_{28}(w, t)/w = w^{12} + 3.26\, w^9 t^2 + 5.99\, w^6 t^4 + 7.66\, w^3 t^6 + 9.5\, t^8$$

se décompose, dans le corps des restes d'entiers suivant le module 31 en le produit:

$$(w^3 + 12\, t^2)(w^3 + 16\, t^2)(w^3 + 18\, t^2)(w^3 + 25\, t^2)\,.$$

II. Sommes des puissances des racines d'une équation algébrique

Pour généraliser facilement les résultats précédents, il est commode d'utiliser les sommes S_j des puissances des racines d'une équation algébrique:

$$X^{n+1} - v_1 X^n - v_2 X^{n-1} - \ldots - v_{n+1} = 0\,, \tag{16}$$

pour les exposants entiers j, tant positifs que négatifs ou nuls, et les combinaisons linéaires de ces sommes S_j.

Si on considère la puissance θ^j d'une racine θ de l'équation (16), d'exposant j entier positif, négatif ou nul, comme une fonction $f(j)$ de l'exposant j, cette fonction vérifie la relation de récurrence:

$$f(j) = \Sigma\,(v_i f(j-i))\,, \tag{17}$$

où la somme est étendue aux valeurs entières de i de 1 à $n + 1$. Toute combinaison linéaire de plusieurs solutions de la relation de récurrence (17) vérifie aussi cette relation; en particulier, les sommes S_j des puissances d'exposant j des racines de l'équation (16) vérifie la relation:

$$S_j = \Sigma\,(v_i S_{j-i})\,.$$

De façon plus précise, on peut déterminer de manière unique une solution de la relation (17) qui prend des valeurs données pour n valeurs de la variable j; elle peut être exprimée comme combinaison linéaire de n solutions particulières de la relation (17), pourvu que ces solutions soient linéairement indépendantes.

En particulier, on peut déterminer une combinaison linéaire:

$$K_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) = a_1\,\theta_1^j + a_2\,\theta_2^j + \ldots + a_{n+1}\,\theta_{n+1}^j$$

des puissances d'exposant j des racines de l'équation (16) telle que:

$$K_0 = 1\,, \qquad K_{-1} = 0\,, \qquad K_{-2} = 0\,, \ \ldots\,, \qquad K_{-n} = 0\,. \tag{18}$$

La fonction K_j est déterminée de manière unique, pourvu que l'équation (16) n'ait pas de racine multiple. Inversement, les fonctions $f(j) = \theta^j$, pour chaque racine θ de l'équation (16), peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires de $n + 1$ fonctions K_{i+j}, par exemple pour les valeurs $0, 1, \ldots, n$ de l'indice i.

Les fonctions $K_j\,(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ peuvent être calculées, à partir des valeurs initiales (18), au moyen de la formule de récurrence (17). Elles peuvent aussi, pour les valeurs positives des indices j, être exprimées en fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ par la formule:

$$K_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) = \Sigma\left(\frac{(j_1 + j_2 + \ldots + j_{n+1})\,!}{j_1\,!\,j_2\,!\ldots j_{n+1}\,!}\,v_1^{j_1}\,v_2^{j_2}\ldots v_{n+1}^{j_{n+1}}\right) \tag{19}$$

où la somme est étendue à toutes les décompositions de l'entier j en sommes de la forme:

$$j = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots + (n+1)\,j_{n+1} \tag{20}$$

avec $j_1, j_2, \ldots, j_{n+1}$ entiers positifs ou nuls.

Les sommes S_j, ou plus généralement les fonctions S_{i+j} de l'indice j, pour i fixe, peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires des fonctions K_j par la formule:

$$S_{i+j} = u_0\,K_j + u_1\,K_{j-1} + \ldots + u_n\,K_{j-n}$$

où les coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont déterminés par les relations:

$$S_i = u_0\,, \qquad S_{i+1} = u_0\,K_1 + u_1\,, \qquad S_{i+2} = u_0\,K_2 + u_1\,K_1 + u_2\,,$$
$$\ldots\,, \qquad S_{i+n} = u_0\,K_n + u_1\,K_{n-1} + \ldots + u_n\,.$$

Elles peuvent aussi être calculées, pour les entiers positifs j, en fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ par la formule:

$$S_j = j\,\Sigma\left(\frac{(j_1 + j_2 + \ldots + j_{n+1} - 1)\,!}{j_1\,!\,j_2\,!\ldots j_{n+1}\,!}\,v_1^{j_1}\,v_2^{j_2}\ldots v_{n+1}^{j_{n+1}}\right) \tag{21}$$

où la somme est étendue aux décompositions de l'entier j de la forme (20) [1]).

Exemples : Pour $n = 4$, les fonctions K_4, K_5 et K_6 sont:

$$K_4 = v_1^4 + 3v_1^2 v_2 + 2v_1 v_3 + v_2^2 + v_4$$
$$K_5 = v_1^5 + 4v_1^3 v_2 + 3v_1^2 v_3 + 3v_1 v_2^2 + 2v_1 v_4 + 2v_1 v_4 + 2v_2 v_3$$
$$K_6 = v_1^6 + 5v_1^4 v_2 + 4v_1^3 v_3 + 6v_1^2 v_2^2 + 3v_1^2 v_4 + 6v_1 v_2 v_3 + v_2^3 + 2v_2 v_4 + v_3^2 .$$

Pour $n = 5$, la fonction K_{12} (avec $v_1 = 0$) est:

$$K_{12} = v_4^3 + 12v_2 v_3^2 v_4 + 6v_2^2 v_4^2 + 5v_2^4 v_4 + v_3^4 + v_2^6 + 10v_2^3 v_3^2 + 3v_5^2 v_2 + 6v_5 v_3 v_4 + 12v_5 v_3 v_2^2 .$$

III. Congruences de degré arbitraire

On cherche les conditions que doivent vérifier les entiers $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ pour que la congruence:

$$X^{n+1} - v_1 X^n - v_2 X^{n-1} - \ldots - v_{n+1} \equiv 0 , \qquad (N) , \qquad (22)$$

où N est un entier premier, ait $n + 1$ solutions entières et distinctes.

Le théorème de Fermat montre que, si les racines θ de cette congruence sont entières, elles vérifient la congruence:

$$\theta^{N-1} \equiv \theta , \qquad (N) . \qquad 23)$$

Les fonctions K_j vérifient alors, pour toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de j, les congruences:

$$K_{j+N-1} \equiv K_j , \qquad (N) . \qquad (24)$$

Inversement, si $n + 1$ fonctions K_{i+j} vérifient la congruence (24), les racines θ de la congruence (22), vérifient toutes la congruence de Fermat (23) et par suite sont entières. Les fonctions K_j ont d'ailleurs été choisies de manière que les conditions les plus simples correspondent aux valeurs entières de i de $-n$ à 0.

Ainsi, les congruences:

$$K_{N-n} \equiv 0 , \qquad K_{N-n-1} \equiv 0 , \qquad \ldots , \qquad K_{N-2} \equiv 0 , \qquad K_{N-1} , \qquad (N) , \qquad (25)$$

---

1) *Loc. cit.*, p. 135, où la formule est établie seulement pour $v_1 = 0$, mais peut être généralisée facilement. Voir aussi Glenisson et Derdvidue, *Mathesis* (1960).