ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Autor(en): **Daróczy, Z.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41530

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Von Z. DARÓCZY

§. 1

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in H)$. Mit $[H \to H]$ bezeichnen wir den Ring der linearen Operatoren von H. Ein Operator $A \in [H \to H]$ wird regulär genannt, wenn die lineare Inverse $A^{-1} \in [H \to H]$ existiert. In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit der Funktionalgleichung

$$\varphi\left[A(x) + B(y) + c\right] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \qquad (x, y \in H) \tag{1}$$

beschäftigen, wobei φ eine eindeutige Abbildung des Raums H in die Menge der reellen Zahlen R ist. Dabei sind A und B reguläre Operatoren aus $[H \to H]$ und c ist ein Element aus H. Über die Konstanten α, β, γ setzen wir voraus, dass $\alpha\beta \neq 0$ gilt.

Ziel dieser Arbeit ist es, für die Funktionalgleichung (1) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz nichtkonstanter stetiger Lösungen zu bestimmen.

Im eindimensionalen Fall geht (1) in die bekannte Funktionalgleichung

$$\varphi(ax + by + c) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \qquad (\varphi\colon R \to R\,;\ x, y \in R) \tag{2}$$

über, wobei keine der Konstanten a, b, α und β gleich Null ist. Für die Funktionalgleichung (2) hat J. ACZÉL in [1] den folgenden Satz bewiesen: *Eine stetige nichtkonstante Lösung der Gleichung* (2) *existiert dann und nur dann, falls* $a = \alpha$, $b = \beta$ *ist. Dabei muss* $\gamma = 0$ *sein, falls* $\alpha + \beta = 1$ *und* $c = 0$ *ist* (Siehe auch [2]). Wenn φ keine stetige Funktion ist, dann gilt diese Behauptung nicht mehr, wie es die Untersuchungen der Arbeit [3] (Siehe auch [4], [5]) zeigen.

In § 2 beweisen wir zwei Lemmata über die Lösungen von (1). In § 3 untersuchen wir die stetigen nichtkonstanten Lösungen der Funktionalgleichung (1) und wir beweisen eine Verallgemeinerung des Satzes von J. ACZÉL.

§. 2

Es gilt das folgende

LEMMA 1. *Genügt das Funktional* $\varphi(x)$ *der Gleichung* (1), *so genügt das Funktional* $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ *der Funktionalgleichung*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) \qquad (x, y \in H). \tag{3}$$

Beweis. Wir machen die folgenden Substitutionen in der Gleichung (1):

$$x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(-c);$$
$$x = 0, \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = 0, \quad y = B^{-1}(-c).$$

Dann erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\varphi(u+v) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \tag{4}$$

$$\varphi(u) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma, \tag{5}$$

$$\varphi(v) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \tag{6}$$

$$\varphi(0) = a\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \tag{7}$$

Aus (4), (5), (6) und (7) folgt unmittelbar

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(0),$$

d.h. das Funktional $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ genügt der Gleichung (3).

Bemerkung: Für die Funktionalgleichung (2) wurde dieses Lemma erstmals in [3] bewiesen. Die hier beschriebene Beweisidee stammt von L. LOSONCZI (Siehe [5]).

LEMMA 2. *Befriedigt das Funktional* $\varphi(x)$ *die Gleichung* (1), *so gelten für das Funktional* $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ *die Relationen*

$$\psi[A(x)] = \alpha\psi(x), \quad \psi[B(x)] = \beta\psi(x) \qquad (x \in H). \tag{8}$$

Beweis. Setzen wir in (1) $y = B^{-1}(-c)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi[A(x)] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \tag{9}$$

Mit der Berücksichtigung von (7) und (9) gewinnen wir

$$\psi[A(x)] = \varphi[A(x)] - \varphi(0) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma - \varphi(0)$$
$$= \alpha\varphi(x) + \varphi(0) - \alpha\varphi(0) - \varphi(0) = \alpha[\varphi(x) - \varphi(0)] = \alpha\psi(x).$$

Damit ist unseres Lemma bereits bewiesen, da der Beweis für B und β analog verläuft.

§. 3

Es sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl und A ein Operator aus $[H \to H]$. Wir führen die folgenden Bezeichnung ein: $E_\lambda(A) = \{ x \mid x \in H, A(x) - \lambda x = 0\}$. Mit anderen Worten: $E_\lambda(A)$ ist der zu λ gehörige Eigenraum von A. Den adjungierten Operator von A bezeichnen wir mit A^*. Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung, wenn ein* $x_0 \neq 0$ *in* $E = E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$ *und eine Zahl* δ *in* R *existiert, so dass die Gleichung*

$$(c, x_0) = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma \tag{10}$$

gilt.

In diesem Falle ist die allgemeine stetige und nichtkonstante Lösung der Gleichung (1)

$$\varphi(x) = (x, x_0) + \delta\,, \tag{11}$$

wobei $x_0 \neq 0$ *aus* E *und* δ *aus* R *mit der Eigenschaft* (10) *beliebig wählbar ist.*

Beweis. 1) Es sei φ eine stetige nichtkonstante Lösung von (1). Dann ist $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ auch stetig und nichtkonstant und nach Lemma 1 genügt es der Gleichung (3). Aus dem Satz von RIESZ folgt dann die Darstellung

$$\psi(x) = (x, x_0) \qquad (x \in H)\,, \tag{12}$$

wobei x_0 ein von Null verschiedenes Element von H ist (Siehe [6]). Aus (8) folgen die Gleichungen

$$(A(x), x_0) = \alpha(x, x_0)$$

und

$$(B(x), x_0) = \beta(x, x_0)\,,$$

also ist $x_0 \neq 0$ ein Element aus $E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$. Aus (1) und (12) ergibt sich (mit der Substitution $x = y = 0$ und $\delta = \varphi(0)$)

$$(c, x_0) = \psi(c) = \varphi(c) - \delta = \alpha\delta + \beta\delta + \gamma - \delta = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma\,,$$

also gilt (10). Dabei haben wir gezeigt, dass φ die Gestalt $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0) = (x, x_0) + \delta$ hat.

2) Wir werden jetzt zeigen, dass (11) eine stetige nichtkonstante Lösung von (1) ist, falls die Bedingungen des Satzes gelten. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\varphi\left[A(x)+B(y)+c\right] &= \left(A(x)+B(y)+(c,x_0)\right)+\delta\\ &= \left(A(x),x_0\right)+\left(B(y),x_0\right)+(c,x_0)+\delta\\ &= \left(x,A^*(x_0)\right)+\left(y,B^*(x_0)\right)+(\alpha+\beta-1)\,\delta+\gamma+\delta\\ &= (x,\alpha x_0)+(y,\beta x_0)+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\\ &= \alpha\left[(x,x_0)+\delta\right]+\beta\left[(y,x_0)+\delta\right]+\gamma = \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)+\gamma\,.\end{aligned}$$

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass unserer Satz eine Verallgemeinerung des in § 1 erwähnten Satzes von J. ACZÉL ist.

LITERATUR

[1] ACZÉL, J., Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comment. Math. Helvetici*, *21* (1948), 247-252.

[2] —— *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1960.

[3] DARÓCZY, Z., Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nicht-, konstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.* (Szeged), *22* (1961), 31-41.

[4] —— A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Matematikai Lapok*, 15 (1964), 52-86 (Ungarisch).

[5] LOSONCZI, L., Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math* (Szeged), *25* (1964), 250-254.

[6] RIESZ, F. und B. SZ. NAGY, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Berlin, 1956.

(Reçu le 9 janvier 1967)

Dr. Z. Daróczy
Math. Inst. der Universität Debrecen
Debrecen 10
Hongrie