Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Helfenstein [4] a montré qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, si une certaine fonction qui le définit est six fois dérivable aux sommets. Comme d'autre part E. Wirsing [6] a démontré que le bord de l'ovale hypothétique est une courbe analytique (« regulär-analytisch »), sa non-existence serait donc démontrée. Mais Wirsing pense que la preuve d'Helfenstein, qui s'appuie sur une dérivabilité locale, doit contenir une erreur ([6], p. 304). A son avis, l'inexistence de l'ovale doublement isocorde ne peut résulter que d'une considération globale. Le problème est encore cité en 1966 par Stanley Ogilvy parmi les questions ouvertes [7].

Je me propose de ramener le problème géométrique à une question de suite récurrente, d'en déduire l'inexistence de l'ovale doublement isocorde pour une excentricité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, ainsi que pour une liste de valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$, et de montrer de cette manière que l'existence de cet ovale est très improbable, quelle que soit l'excentricité.

I

Pour montrer qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, il suffirait d'établir qu'une suite récurrente x_n, que nous allons voir, n'est pas monotone.

Prenons comme unité la longueur commune des isocordes, et donnons nous la distance $OO' = a$. Le milieu I de OO' étant centre de symétrie de l'ovale Ω, les points A, A' de la droite OO' tels que $IA = IA' = \frac{1}{2}$ appartiennent à Ω. Nous les plaçons dans l'ordre A', O, O', A. L'ovale étant symétrique par rapport à la droite OO', un point B, situé sur sa perpendiculaire en O à la distance $\frac{1}{2}$, fait également partie de Ω. Rapportons le plan aux axes Ox, Oy, orientés respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Soit M_n un point de Ω d'affixe

$$z_n = r_n e^{i\theta n} = x_n + iy_n .$$

L'extrémité M_n' de la corde $M_n M_n' = 1$ menée par O a pour affixe $z_n - e^{i\theta n}$ et le symétrique de M_n' par rapport à I est un point M_{n+1} de Ω [1] d'affixe

$$z_{n+1} = a + e^{i\theta n} - z_n , \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{i}{2} .$$

si on prend B pour point M_0.

---

1) On démontre facilement que le point M_{n+2} coïncide avec l'extrémité P de la corde $M'_n P = 1$ passant par O'.

On en déduit sans peine deux systèmes de récurrence:

$$(I)\quad \begin{cases} 1)\quad x_{n+1} = a + x_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & x_0 = 0, \\[2ex] 2)\quad y_{n+1} = y_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & y_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} 3)\quad tg\,\theta_{n+1} = \dfrac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + \dfrac{a}{1-r_n}}, & \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}, \\[2ex] 4)\quad r_{n+1}^2 = a^2 + 2a(1-r_n)\cos\theta_n + (1-r_n)^2, & r_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Comme $r_n < 1$ pour Ω, on voit par 3) que $\theta_{n+1} < \theta_n$ et par 2) que $y_n > 0$, quel que soit n.

Soit M_n'' le symétrique de M_n par rapport à Ox.

On sait que *Ω n'existe pas si pour un n, $r_{n+1} < r_n$*, car on a vu que $0M$ croît quand M parcourt le bord de A' vers A. *Il en est de même si pour un n, $x_{n+1} < x_n$*, car l'angle $M_n M_{n+1} M_n''$, inscrit dans l'ovale, serait alors rentrant.

Remarque. La suite x_n a un comportement intéressant. Les suites x_{2k} et x_{2k+1} sont toutes les deux croissantes, car $x_n < x_{n+2}$, puisque 1) permet d'écrire

$$x_n + x_{n+1} = a + \cos\theta_n < a + \cos\theta_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+2}.$$

Or le calcul électronique montre (du moins pour tous les a traités) qu'à un certain rang n', $x_{n'} > \dfrac{a+1}{2}$. Donc $x_n > \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices de même parité que n' et supérieurs à lui, et $x_n < \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices supérieurs à n' et de parité contraire. Les premiers convergent donc vers une valeur $x' > \dfrac{a+1}{2}$ et les seconds vers une valeur $x'' < \dfrac{a+1}{2}$, avec $x' + x'' = a + 1$. Mais le calcul électronique montre que x' et x'' sont très

voisins de $\dfrac{a+1}{2}$ lorsque a est petit. Ainsi, pour $a = 0{,}03$,

$$\frac{1+a}{2} - x_{463} \simeq 14 \cdot 10^{-25}.$$

II

Il n'existe pas d'ovale doublement isocorde d'excentricité supérieure ou égale à ½.

Nous distinguerons deux cas:

1) $a \geqq 0{,}6$. Il suffira de montrer que $r_2^2 < r_1^2$. Puisque

$$r_1^2 = a^2 + 1/4, \qquad \text{et} \qquad r_2^2 = 5/4 - 1/2r_1,$$

cette inégalité se réduit à

$$4a^4 - 7a^2 + 2 < 0, \qquad \text{soit} \qquad (7-\sqrt{17})/8 < a^2 < (7+\sqrt{17})/8.$$

Comme $0 < a < 1$, il faut donc $a > [(7-\sqrt{17})/8]^{-\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{0{,}3598}$, valeur légèrement inférieure à 0,6.

2) $0{,}5 \leqq a \leqq 0{,}6$. Il suffit de montrer que pour ces valeurs

$$x_3 > \frac{a+1}{2}$$

Or,

$$x_2 = 2a(1+4a^2)^{-1/2}, \qquad x_3 = a + x_2((1/r_2)-1)),$$

et l'inégalité à démontrer prend donc la forme

$$f(a) = (5/4-(4a^2+1)^{-1/2})^{-1/2} - 1 - \frac{1-a}{4a}(4a^2+1)^{1/2} > 0.$$

La fonction $f(a)$ est la différence de

$$u(a) = (5/4-(4a^2+1)^{-1/2})^{-1/2} - 1, \qquad v(a) = \frac{1-a}{4a}(4a^2+1)^{1/2},$$

qui sont décroissantes pour $a > 0$. Dans un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, de bornes positives, $f(a)$ est donc minorée par $F(\alpha, \beta) = u(\beta) - v(\alpha)$.

Nous avons alors partagé l'intervalle [0,5; 0,6] en 25 intervalles égaux et déterminé pour chacun $F(\alpha, \beta)$ à l'aide d'un calculateur électronique. Toutes les valeurs obtenues étant positives, $f(a) > 0$ dans [0,5; 0,6].